

Lösungen zum Thema Ist doch logisch!

Lösung zu Aufgabe 1. (Aussagen I)


a) 1) Aussage 2) keine Aussage 3) Aussage 4) Aussage 5) Aussage 6) Aussage

b) 1) Es gibt einen Schwan, der schwarz ist.

2) $x \leq 0,5 \vee 5 \leq x$


c) Wir bezeichnen „Pinguin“ mit dem Buchstaben A , „alte Filme“ mit dem Buchstaben B und die Eigenschaft „schwarz-weiß“ mit dem Buchstaben C .

Die erste Aussage „Pinguine sind schwarz-weiß“ kann man folgendermaßen in Symbolsprache übersetzen: $A \Rightarrow C$, die zweite Aussage dementsprechend in: $B \Rightarrow C$.

Die Folgerung „Pinguine sind alte Filme“ würde in Symbolen $A \Rightarrow B$ bedeuten. Dies folgt aber nicht aus den obigen beiden Aussagen, da es sich hier jeweils um „Wenn-Dann-Verknüpfungen“ handelt. Wenn es ein Pinguin ist, dann ist er schwarz-weiß. Wenn es ein alter Film ist, dann ist er schwarz-weiß. Der Pfeil geht also nur von links nach rechts und nicht in beide Richtungen (Genau-dann-wenn-Verknüpfung). Es wird in diesem Beispiel fälschlicherweise von einer Äquivalenz ausgegangen. 

Lösung zu Aufgabe 2. (Aussagen II)¹

Die zweite und die dritte Aussage können gleichzeitig wahr sein: Ist nämlich die zweite Aussage wahr, dann ist es auch die dritte. Die zweite und die dritte Aussage können gleichzeitig auch nicht wahr sein, und zwar in dem Fall, wenn die erste Aussage wahr ist.

Die erste und die zweite Aussage können beide gleichzeitig nicht wahr sein, und zwar in dem Fall, wenn Bacon kein einziges solches Theaterstück geschrieben hat. Es ist jedoch offensichtlich, dass diese beiden Aussagen nicht gleichzeitig wahr sein können. 

Lösung zu Aufgabe 3. (Perückenfarbe)

a) Allen ist bekannt, dass es eine Auswahl von drei roten und zwei blauen Perücken gibt. Sehen wir uns die verschiedenen Fälle einmal an (du kannst sie dir auch farbig aufzeichnen):

1. Die erste und die zweite Person haben beide eine blaue Perücke auf: Hier wüsste die hinterste Person sofort, dass sie selbst nur eine rote Perücke aufhaben kann, da lediglich zwei blaue Perücken vorhanden sind. Die hinterste Person würde die Frage also in diesem Fall nicht verneinen.

2. Die erste Person hat eine blaue Perücke auf, die zweite Person eine rote Perücke: Die hinterste Person kann auch hier nicht wissen, ob sie selbst eine rote oder eine blaue Perücke trägt. Sie verneint also auch in diesem Fall die Antwort. Die mittlere Person, die als nächstes gefragt wird, sieht, dass die vorderste Person eine blaue Perücke trägt und hat gehört, dass die hintere Person nicht weiß, welche Perücke sie trägt. Daraus kann sie schließen, dass sie selbst eine rote Perücke aufhaben muss, da sonst die hinterste Person gewusst hätte, welche Perückenfarbe sie selbst trägt.

Nun gibt es noch zwei weitere Fälle, die wir im Folgenden gleichzeitig betrachten:

3. Die erste Person hat eine rote Perücke auf und die zweite Person trägt entweder eine blaue oder eine rote Perücke: Die hinterste Person kann auch hier (in beiden Fällen) nicht wissen, ob sie selbst eine rote oder eine blaue Perücke trägt. Sie verneint die Antwort. Die mittlere Person, die als nächstes gefragt wird, sieht, dass die vorderste Person eine rote Perücke trägt und hat gehört, dass die hintere Person nicht weiß, welche Perücke sie trägt. Leider hilft ihr das nicht weiter und auch sie kann die Frage über ihre eigene Perückenfarbe nicht beantworten. Nun weiß aber die vorderste Person sofort, dass sie selbst eine rote Perücke tragen muss, da in allen anderen Fällen eine der anderen beiden Personen die Frage über ihre eigene Perückenfarbe bereits zuvor beantworten hätte können.

b) Nennen wir die drei Personen P1, P2 und P3.

Generell gibt es drei Möglichkeiten für die Perückenverteilung: Alle drei tragen rote Perücken, oder zwei Personen haben rote Perücken und einer eine blaue Perücke auf, oder eine Person trägt eine rote Perücke und zwei eine blaue.

Wäre nur eine rote Perücke dabei, wüsste derjenige mit der roten Perücke sofort seine eigene Perückenfarbe, da er die anderen beiden einzigen blauen Perücken bereits auf den Köpfen der anderen beiden Personen sieht. Und da die Personen erst nach einer Weile und alle gleichzeitig antworten, können wir annehmen, dass mindestens zwei rote Perücken dabei sind.

P1 überlegt sich Folgendes: „Meine beiden Kameraden haben rote Perücken auf. Meine ist entweder rot oder blau.“ Ist sie blau, müsste P2 Folgendes sagen:

„P1 hat eine blaue Perücke, P3 eine rote. Demnach trage ich auch eine rote, denn wäre sie blau, würde P3, der dann die beiden einzigen blauen Perücken auf den Köpfen seiner Kameraden sehen würde, sofort ausrufen, dass seine rot ist. Folglich habe ich eine rote Perücke auf. P2 jedoch schweigt. Folglich kann meine eigene Perücke unmöglich blau sein: Sie ist rot.“ Jeder der anderen beiden konnte eine ähnliche Überlegung anstellen, indem er sich auf die hohen logischen Fähigkeiten seiner beiden Kameraden verließ. Sie erkennen also alle drei nach einer Weile, dass sie alle rote Perücken tragen müssen. □

Lösung zu Aufgabe 4. (Logical) Am besten legen wir uns folgende Tabelle an, in der als erstes die Hausreihenfolge und die Oberbegriffe der zugehörigen Merkmale eingetragen werden:

	Haus Nr. 1	Haus Nr. 2	Haus Nr. 3	Haus Nr. 4	Haus Nr. 5
Nationalität					
Lieblingsgetränk					
Lieblingsspeise					
Hausfarbe					
Haustier					

Nun gehen wir folgendermaßen vor (Reihenfolge siehe Ziffern (1)–(18)):

- (1) & (2): Hinweis 7 (1), 9 (2) können wir sofort eintragen.
- (3) Da der Norweger im ersten Haus wohnt (Hinweis 9) und die Häuser in einer Reihe nebeneinander stehen, sagt uns Hinweis 13, dass Haus Nr. 2 das blaue Haus sein muss.
- (4) Hinweis 4 sagt uns, dass entweder Haus Nr. 3 oder Haus Nr. 4 grün sein muss und Haus Nr. 4 oder 5 weiß. Dies können wir vorläufig mit Fragezeichen in die Tabelle eintragen.
- (5) Mit Hinweis 5 wissen wir, dass Haus Nr. 4 das grüne sein muss, da wir das Lieblingsgetränk Milch des Besitzers von Haus Nr. 3 bereits eingetragen haben.
- (6) Nun ist klar, dass Haus Nr. 5 weiß sein muss.
- (7) Hinweis 1 hilft uns, das dritte Haus als rot und im Besitz des Deutschen zu erkennen, da nur noch bei Haus Nr. 1 und Haus Nr. 3 die Farbe unklar ist, in Haus Nr. 1 jedoch bereits der Norweger wohnt.
- (8) Da nun nur noch die Farbe des ersten Hauses offen ist, gibt uns Hinweis 8 sowohl die Farbe (gelb) als auch die Lieblingsspeise (Fisch) des darin lebenden Norwegers an.
- (9) Hinweis 11 verrät uns nun das Haustier, das in Haus Nr. 2 wohnt.
- (10) Um Hinweis 15 eintragen zu können, sehen wir uns zuerst Hinweis 3 und 12 gleichzeitig an. Der teetrinkende Däne kann in Haus 2 oder 5 wohnen. Der Kaffeetrinker, der gerne Pizza isst, kann ebenso nur in Haus 2 oder 5 wohnen, da sonst nirgends die zwei entsprechenden Felder frei sind. Wir können nun noch nicht sagen, wer davon in Haus 2 oder 5 wohnt, deshalb tragen wir die Merkmale vorerst mit Fragezeichen ein. Da nun aber auf alle Fälle zu Haus 2 und 5 bereits jeweils ein Getränk (entweder Tee oder Kaffee) zugeordnet wurde, wissen wir, dass das Wasser (Hinweis 15) nur noch in Haus 1 eingetragen werden kann.
- (11) Nun können wir mit Hinweis 15 den Salat dem Haus Nr. 2 zuordnen.
- (12) Für die Pizza (Hinweis 12) kommt nur noch Haus 5 in Frage.
- (13) Hinweis 12 und 3 können wir nun sicher zu Haus Nr. 2 und Nr. 5 zuordnen.
- (14) Hinweis 14 passt nur zum vierten Haus.
- (15) Nun bleibt noch Haus Nr. 5 für den Schweden (Hinweis 2) übrig.
- (16) Hinweis 6 können wir dem dritten Haus zuordnen, da alle anderen Lieblings Speisen bereits ausgefüllt sind.
- (17) Für Hinweis 10 bleibt nun das erste Haus übrig.
- (18) Da nur noch das Haustierfeld von Haus Nr. 4 leer ist, wissen wir, dass der Brite als Haustier einen Hamster haben muss.

	Haus Nr. 1	Haus Nr. 2	Haus Nr. 3	Haus Nr. 4	Haus Nr. 5
Nationalität	Norweger (2)	(Däne?) (10) Däne (13)	Deutscher (7)	Brite (14)	(Däne?) (10) Schwede (15)
Lieblingsgetränk	Wasser (10)	(Tee?) (10) (Kaffee?) (10) Tee (13)	Milch (1)	Bier (5)	(Tee?) (10) (Kaffee?) (10) Kaffee (13)
Lieblingsspeise	Fisch (8)	(Pizza?) (10) Salat (11)	Spaghetti (16)	Kartoffeln (14)	(Pizza?) (10) Pizza (12)
Hausfarbe	gelb (8)	blau (3)	(grün?) (4) rot (7)	(grün?) (4) (weiß?) (4) grün (5)	(weiß?) (4) weiß (5)
Haustier	Katze (17)	Hund (9)	Vogel (16)	Hamster (18)	Pferd (15)



Lösung zu Aufgabe 5. (Mit Logik auf der Spur)²

a) Um Bob zu entlarven, kann eine vollständige Wahrheitstafel für die drei Aussagen

A : „Alex war am Raub beteiligt.“

B : „Bob war am Raub beteiligt.“

C : „Charly war am Raub beteiligt.“

aufgestellt werden.

Insgesamt gibt es acht mögliche Kombinationen von Wahrheitswerten (siehe Tabelle):

A	B	C
w	w	w
w	w	f
w	f	w
f	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w
f	f	f

Stellen wir nun die drei Aussagen der Verdächtigen mit logischen Operatoren dar. Jeder von ihnen behauptete, dass er selber unschuldig sei, und beschuldigt einen oder zwei seiner Kumpel:

Aussage von Alex: $\neg A \wedge B \wedge C$ ³

Aussage von Bob: $\neg B \wedge A \wedge \neg C$

Aussage von Charly: $\neg C \wedge A \wedge B$

Wir ergänzen nun obige Tabelle mit den drei Aussagen (Spalten 3 bis 6) und tragen darin die jeweiligen Wahrheitswerte ein:


A	B	C	Alex: $\neg A \wedge B \wedge C$	Bob: $\neg B \wedge A \wedge \neg C$	Charly: $\neg C \wedge A \wedge B$	kongruent?
w	w	w	f	f	f	ja
w	w	f	f	f	w	ja
w	f	w	f	f	f	nein
f	w	w	w	f	f	ja
w	f	f	f	w	f	nein
f	w	f	f	f	f	nein
f	f	w	f	f	f	nein
f	f	f	f	f	f	nein

In der letzten Spalte, die wir mit „kongruent?“ bezeichnet haben, wird die Annahme codiert, dass jeder Schuldige lügt und jeder Unschuldige die Wahrheit sagt. Das heißt, dass der Wahrheitswert der Aussage von Alex genau der umgekehrte der Aussage A sein muss. Entsprechendes gilt für Bobs und Charlys Aussagen.

Untersuchen wir dies in jeder Zeile der Tabelle, bleiben nur drei Zeilen („ja“; grün hinterlegt) übrig, in denen das für alle drei Verdächtigen der Fall ist. Da in diesen drei Zeilen die Aussage B immer wahr ist, können wir daraus schließen, dass Bob auf jeden Fall an dem Bankraub beteiligt war.

² Aufgabenquelle: Drösser, C. (2012): Der Logikverführer. Reinbek: Rowohlt. S.21-25/33/34.

³Eigentlich müsste man hier Klammern setzen: $\neg A \wedge (B \wedge C)$, da die Operatoren streng genommen nur für zwei Aussagen definiert sind. Aber bei dreigliedrigen Aussagen mit dem Operator „und“ oder „oder“ macht es keinen Unterschied, ob man die Klammern setzt oder nicht.

b) Die zweite und die dritte grüne Zeile entsprechen den Aussagen von Alex und Charly, nämlich dass jeweils die beiden anderen den Raub begangen haben. Da Bob verraten hat, dass sowohl Alex als auch Charly nicht die Wahrheit gesagt haben, bleibt nur noch die erste grüne Zeile übrig: Es waren also alle drei Gauner an dem Einbruch beteiligt. 


Lösung zu Aufgabe 6. (Lügner)⁴

Die Frage lautet: „Bist du Bruno?“

Erklärung:

Da Anton lügt, wird er diese Frage mit „ja“ beantworten.

Sowohl Bruno, da er lügt, als auch Carl, da er die Wahrheit sagt, beantworten diese Frage mit „nein“.

Erhält der Onkel als Antwort auf seine Frage nun ein „Ja“, weiß er, dass er Anton vor sich hat. Ein „Nein“ dagegen verrät ihm, dass es sich nicht um Anton, sondern um Bruno oder Carl handeln muss. 

⁴ Aufgabenquelle: Kastner, H. (2004): Die Fundgrube für Denksport und Rätsel. Berlin: Cornelsen Scriptor. S. 88/89.