Schülerzirkel Mathematik
Fakultät für Mathematik. Universität Regensburg

Numerakles

. . . und seine sechs Aufgaben

1 Aufgaben und Lösungen

Aufgabe 1 (Vertreibung der Vögel*). Nach längeren Verhandlungen mit Numerakles willigen die Vögel ein, zu verschwinden, wenn Numerakles zwei aufeinanderfolgende von insgesamt drei Kämpfen gewinnt. Er muss dabei abwechselnd gegen den kleinsten und gegen den größten Vogel antreten, also entweder

Kleinster – Größter – Kleinster
oder
Größter – Kleinster – Größter.

Der größte Vogel ist gefährlicher und kämpft besser als der kleinste. Für welche Reihenfolge sollte sich Numerakles entscheiden? Begründe Deine Antwort!

Lösung. Numerakles sollte sich für die Reihenfolge

Größter – Kleinster – Größter

Thema vom 09. Mai 2014. Einsenden der Lösungen bis 11. Juli 2014.
Schülerzirkel Mathematik, Fakultät für Mathematik, 93040 Regensburg
http://www.mathematik.uni-r.de/schuelerzirkel, schueler.zirkel@mathematik.uni-regensburg.de

enscheiden, denn so hat er zwei Gelegenheiten, sein Glück gegen den größten Vogel zu versuchen. Etwas genauer: Seien $p, q \in [0, 1]$ die Gewinnwahrscheinlichkeiten beim Kampf gegen den kleinsten bzw. den größten Vogel. Da das Gewinnen gegen den kleinsten und den größten unabhängig voneinander sind, erhalten wir als Wahrscheinlichkeiten für (mindestens) zwei aufeinanderfolgende Siege:

- Bei der Reihenfolge Kleinster – Größter – Kleinster:
$$p \cdot q + (1 - p) \cdot q \cdot p = p \cdot q \cdot (2 - p).$$
- Bei der Reihenfolge Größter – Kleinster – Größter:
$$q \cdot p + (1 - q) \cdot p \cdot q = p \cdot q \cdot (2 - q).$$

Wegen $p > q$ (der größte Vogel ist gefährlicher und kämpft besser als der kleinste) ist
$$p \cdot q \cdot (2 - q) \geq p \cdot q \cdot (2 - p)$$
Also ist die Erfolgswahrschienlichkeit bei der Reihenfolge

Größter – Kleinster – Größter

größer.

Aufgabe 2 (alea iacta est*). Numerakles bittet Atlas, drei gewöhnliche Würfel zu werfen, einen schwarzen, einen silbernen und einen goldenen. Das Ergebnis soll er sich (zusammen mit den jeweiligen Farben) merken und Numerakles weder zeigen noch nennen. Danach möge er die vom schwarzen Würfel gezeigte Zahl mit 2 multiplizieren, zum Ergebnis 5 addieren und dann die so erhaltene Zahl mit 5 multiplizieren. Hierzu addiere er weiter die vom silbernen Würfel gezeigte Zahl, multipliziere das Ergebnis mit 10, addiere zur so erhaltenen Zahl die vom goldenen Würfel gezeigte Zahl und nenne das Endergebnis.

1. Atlas nennt als Endergebnis 484. Mit welchen Würfeln hat er welche Augenzahlen geworfen? Begründe Deine Antwort!
2. Ist es immer möglich, mit diesem Verfahren, die drei gewürfelten Augenzahlen eindeutig zu ermitteln? Begründe Deine Antwort!

Lösung. Sei B die Augenzahl des schwarzen Würfels, S die Augenzahl des silbernen Würfels und G die Augenzahl des goldenen Würfels. Das Endergebnis E nach der angegebenen Vorschrift ist dann
$$E = \big((2 \cdot B + 5) \cdot 5 + S\big) \cdot 10 + G = 100 \cdot B + 10 \cdot S + G + 250.$$

Dies ist äquivalent zu

$$E - 250 = 100 \cdot B + 10 \cdot S + G.$$

Wegen $B, S, G \in \{1, \dots, 6\}$ folgt aus der Eindeutigkeit der Dezimaldarstellung, dass B, S und G durch diese Gleichung eindeutig bestimmt sind. Dies beantwortet die zweite Frage positiv.

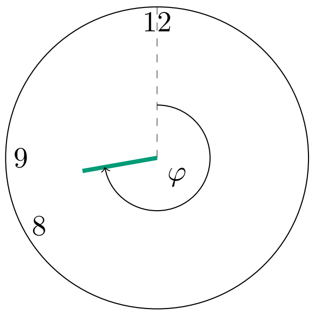
Zur ersten Frage: In diesem Fall ist $E = 484$ bzw.

$$100 \cdot B + 10 \cdot S + G = 481 - 250 = 234,$$

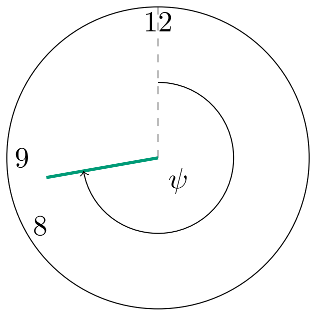
und damit $B = 2$, $S = 3$, $G = 4$.

Aufgabe 3 (Wer kommt zur rechten Zeit ...)**. Aus der Ferne beobachtet Numerakles, dass der wahnsinnige Stier jeden Tag zur selben Zeit ein Nickerchen einlegt (und damit zu dieser Zeit zu einer leichten Beute wird) – nämlich genau dann, wenn zwischen 8 und 9 Uhr der Minuten- und der Stundenzeiger seiner Uhr exakt übereinander stehen (die Zeiger bewegen sich gleichmäßig ohne irgendwelche Sprünge). Zu welcher Zeit beginnt also das Nickerchen? Begründe Deine Antwort!

Lösung. Es bezeichne x die gesuchte Minutenzahl nach 8 Uhr. Außerdem sei φ der Winkel des Stundenzeigers zur Zeit x nach 8 (gemessen ab 12 Uhr, im Uhrzeigersinn) und ψ der Winkel des Minutenzeigers zur Zeit x nach 8:



Stundenzeiger



Minutenzeiger

Also ist

$$\varphi = \frac{360}{12} \cdot \frac{x}{60} + 8 \cdot \frac{360}{12} = \frac{x}{2} + 240,$$
$$\psi = \frac{x}{60} \cdot 360 = 6 \cdot x.$$

Zum Zeitpunkt x stimmen φ und ψ überein. Also erhalten wir

$$\frac{x}{2} + 240 = \varphi = \psi = 6 \cdot x$$

bzw.

$$x = \frac{480}{11} = 43 + \frac{7}{11}.$$

Also beginnt das Nickerchen um 8 Uhr und $43 + \frac{7}{11}$ Minuten.

Aufgabe 4 (Hydra**). Die Hydra ist ein Schlangentier mit viel zu vielen Köpfen und Augen. Numerakles stellt schnell fest, dass es sich bei der Anzahl der Köpfe und Augen um sechsstellige Zahlen handelt. Außerdem bemerkt er folgendes:

- Die Anzahl der Augen endet auf 7. Multipliziert man die Anzahl der Augen mit 5, so erhält man dieselbe Ziffernfolge, bis auf den Unterschied, dass die an der letzten Stelle stehende 7 an die erste Stelle wandert.

- Die Anzahl der Köpfe beginnt mit 1. Multipliziert man sie mit 3, so erhält man dieselbe Ziffernfolge, bis auf den Unterschied, dass die an der ersten Stelle stehende 1 an die letzte Stelle wandert.

Wieviele Köpfe bzw. Augen hat die Hydra? Begründe Deine Antwort!

Lösung. Anzahl der Augen: Die gesuchte Anzahl der Augen A hat die folgende Eigenschaft: Sei x die Zahl, die aus den ersten fünf Stellen von A besteht. Dann ist

$$(10 \cdot x + 7) \cdot 5 = A \cdot 5 = 700000 + x.$$

Dies ist äquivalent zu

$$x = \frac{700000 - 35}{50 - 1} = 14285.$$

Also ist $A = 10 \cdot x + 7 = 142857$.

Anzahl der Köpfe: Die gesuchte Anzahl der Köpfe K hat die folgende Eigenschaft: Sei y die Zahl, die aus den letzten fünf Stellen von K besteht. Dann ist

$$(100000 + y) \cdot 3 = K \cdot 3 = 10 \cdot y + 1$$

bzw.

$$y = \frac{300000 - 1}{10 - 3} = 42857.$$

Also ist $K = 100000 + y = 142857$.

Aufgabe 5 (Rolltreppe in die Unterwelt**). Die Unterwelt kann von der Oberwelt durch eine abwärts fahrende Rolltreppe erreicht werden. Geht Numerakles die Rolltreppe hinab, so zählt er 60 Stufen; geht er die Rolltreppe (entgegen der Fahrtrichtung) im selben Tempo hoch, so zählt er 90 Stufen. Der Wächter der Unterwelt ist bereit, Numerakles in die Oberwelt zu begleiten, wenn dieser ihm nennen kann, wieviele Stufen Numerakles steigen müsste, wenn die Rolltreppe stillstehen würde. Was sollte Numerakles antworten? Begründe Deine Antwort!

Lösung. Sei n die Anzahl der Stufen der Rolltreppe, wenn die Rolltreppe stillstehen würde. Sei v die Geschwindigkeit von Numerakles. Hier messen wir die Geschwindigkeit in Stufen pro Zeiteinheit, die nötig ist, damit die Rolltreppe eine Stufe weiterrückt.

- Dann ist
$$v = \frac{90}{90 - n},$$
denn während Numerakles (entgegen der Fahrtrichtung) die Rolltreppe hochgeht, zählt er 90 Stufen (das ist also die Strecke, die er zurücklegt) und es vergeht genau die Zeit, die nötig ist, damit die Rolltreppe $90 - n$ Stufen weiterrückt.

- Analog gilt
$$v = \frac{60}{n - 60}.$$

Also ist
$$\frac{90}{90 - n} = v = \frac{60}{n - 60},$$
und damit $n = 72$. Also müsste Numerakles 72 Stufen steigen, wenn die Rolltreppe stillstehen würde.

Aufgabe 6 (das Ei fällt nicht weit vom Turm***). Der Riese gibt Numerakles zwei identische Eier und Zugang zu dem hunderstöckigen Turm. Das Ziel ist es, das höchste Stockwerk zu finden, von dem aus ein solches Ei den Flug nach unten unbeschadet übersteht.

Falls ein Ei herunterfällt und nicht beschädigt ist, kann es wiederverwendet werden; ist es jedoch beschädigt, so kann es nicht nochmal verwendet werden. Falls ein Ei beim Sturz aus einem Stockwerk beschädigt wird, so gilt dies auch für alle höheren Stockwerke.

Was ist die minimale Anzahl von Würfen, die maximal nötig ist, um das höchste Stockwerk zu finden, von dem aus die gegebenen Eier den Flug nach unten unbeschadet überstehen? Begründe Deine Antwort!

Lösung. Die minimale Anzahl von Würfen, die maximal nötig ist, um das höchste Stockwerk zu finden, von dem aus die gegebenen Eier den Flug nach unten unbeschadet überstehen, ist 14, denn:

Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $E_1(n)$ die maximale Anzahl von Stockwerken, die man mit einem Ei in höchstens n Würfen sicher überprüfen kann; außerdem sei $E_2(n)$ die maximale Anzahl von Stockwerken, die man mit zwei Eiern in höchstens n Würfen sicher überprüfen kann.

- Es ist klar, dass $E_1(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, da man jedes Stockwerk, von unten angefangen, überprüfen muss.

- Offenbar ist $E_2(1) = 1$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

  $$E_2(n+1) \geq E_2(n) + E_1(n) + 1,$$

  denn: Wir werfen das erste Ei vom Stockwerk $E_1(n) + 1$. Geht das Ei kaputt, so können wir mit dem zweiten Ei die $E_1(n)$ unteren Stockwerke überprüfen. Bleibt das Ei intakt, so können wir die $E_2(n)$ höheren Stockwerke mit höchstens n Würfen der beiden Eier überprüfen.

  Umgekehrt kann man sich analog auch leicht überlegen, dass

  $$E_2(n+1) \leq E_2(n) + E_1(n) + 1$$

  ist: Das erste Ei werde vom Stockwerk $k+1$ geworfen. Falls das Ei kaputtgeht, müssen wir die k unteren Stockwerke mit einem Ei in höchstens n Würfen sicher überprüfen können. Also ist $k \leq E_1(n)$. Bleibt das Ei intakt, so müssen wir die $E_2(n+1) - (k+1)$ oberen Stockwerke mit zwei Eiern in höchstens n Würfen sicher überprüfen können. Also ist $E_2(n+1) - (k+1) \leq E_2(n)$. Zusammen ergibt sich

  $$E_2(n+1) \leq E_2(n) + k + 1 \leq E_2(n) + E_1(n) + 1.$$

  Somit ist $E_2(n+1) = E_2(n) + E_1(n) = E_2(n) + n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Induktion zeigt nun, dass

  $$E_2(n) = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

  für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Wegen

$$\min\{n \in \mathbb{N} \mid E_2(n) \geq 100\} = \min\left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \frac{n \cdot (n+1)}{2} \geq 100\right\} = 14$$

folgt die Behauptung.