Schülerzirkel Mathematik
Fakultät für Mathematik. Universität Regensburg

Wappen des Wiener
Stadtteils Siebenhirten

Die verflixte 7

In der Natur ist die Zahl 7 nur selten zu finden, aber im Volkstum begegnet sie uns häufig: Die sieben Weisen, die sieben Weltwunder, die sieben Zwerge, die sieben Todsünden, die sieben Tage der Schöpfung und danach die sieben Wochentage.

Experimente der Verhaltensforschung zeigen die Bevorzugung der 7: Die häufigste Antwort auf die Frage nach der Lieblingszahl oder bei der Frage nach einer beliebigen Zahl zwischen 1 und 9 ist die Zahl 7.

In einer Bibliothek erscheint die 7 deutlich häufiger in Buchtiteln als die benachbarten Zahlen 6 und 8. Das Gleiche gilt in Lexika für Begriffe, die mit Zahlen beginnen.

Weitere Besonderheiten über die Zahl 7 findest du z.B. in
http://de.wikipedia.org/wiki/Sieben

Thema vom 20. September 2013. Einsenden der Lösungen bis 15. November 2013.
Schülerzirkel Mathematik, Fakultät für Mathematik, 93040 Regensburg
http://www.mathematik.uni-r.de/szm, schueler.zirkel@mathematik.uni-regensburg.de

In der Schule lernt man Teilbarkeitsregeln für 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11 und 12. Welche Zahlen sind aber ohne Rest durch 7 teilbar?

Knobelaufgabe. a) Wenn man zwischen eine zweiziffrige Zahl und ihre Wiederholung eine 0 einfügt, ist die entstehende Zahl durch 7 teilbar.

Beispiel: 23023

Warum ist das immer so?

b) An die Stelle der eingefügten 0 kann auch eine 7 treten und die Zahl bleibt durch 7 teilbar. Warum?

1 Teilbarkeit durch Sieben

Im Gegensatz zu den relativ einfachen Teilbarkeitsregeln für die anderen Zahlen von 1 bis 12, die in der Schule behandelt werden, gibt es für 7 keine einfache Teilbarkeitsregel, sondern leider nur etwas komplexere Regeln (siehe hierzu auch http://de.wikipedia.org/wiki/Teilbarkeit#Teilbarkeit_durch_7).

Eine Teilbarkeitsregel für die 7 lautet zum Beispiel:

Man spaltet die zu prüfende Zahl in ihre letzte Ziffer b und den Rest a auf. Zum Beispiel 3815 in die Zahlen $a = 381$ und $b = 5$. Dann gilt folgender Satz:

> Eine Zahl $n = 10 \cdot a + b$ ist genau dann durch 7 teilbar, wenn ihr Doppeltes $2 \cdot n = 20 \cdot a + 2 \cdot b = 21 \cdot a - (a - 2 \cdot b)$ durch 7 teilbar ist, weswegen man lediglich die Teilbarkeit von $a - 2 \cdot b$ prüfen muss.

Für 3815 muss man also überprüfen, ob $381 - 2 \cdot 5 = 371$ durch 7 teilbar ist. Dazu kann man 371 wieder in 37 und 1 zerlegen. Da $37 - 2 \cdot 1 = 35 = 5 \cdot 7$ durch 7 teilbar ist, sind auch 371 und 3815 durch 7 teilbar.

Diese Regel für die Teilbarkeit durch 7 führt zu einem einfachen Algorithmus, um die restlose Teilbarkeit einer natürlichen Zahl durch 7 zu testen:

1. Man entferne die letzte Ziffer und
2. verdopple diese letzte Ziffer und
3. subtrahiere sie von der Zahl, die aus den übrig gebliebenen Ziffern besteht.

4. Ist die Differenz negativ, so lässt man das Minuszeichen weg.
5. Hat das Ergebnis mehr als eine Ziffer, so wiederholt man die Schritte 1 bis 4.
6. Ergibt sich schließlich 7 oder 0, dann ist die Zahl durch 7 teilbar – und sonst nicht.

Bemerkung: In obigem Beispiel könnte man also auch die 35 noch einmal zerlegen in $3 - 2 \cdot 5 = -7$.

Ein weiteres Beispiel zeigt, dass 1547 restlos durch 7 teilbar ist:

$$154 - 2 \cdot 7 = 140, \qquad 14 - 2 \cdot 0 = 14, \qquad 1 - 2 \cdot 4 = -7$$

In obigem Satz wurden folgende allgemeingültige Beziehungen verwendet:

B1) Das Produkt zweier Zahlen m und n ist durch k teilbar, wenn m *oder* n durch k teilbar sind.

Beispiel: $60 = 5 \cdot 12$ ist durch 4 teilbar, da 12 durch 4 teilbar ist.

B2) Die Summe zweier Zahlen $m + n$ (bzw. die Differenz $m - n$) ist durch k teilbar, wenn m *und* n durch k teilbar sind.

Beispiel: $21 = 15 + 6$ ist durch 3 teilbar, da 15 und 6 beide durch 3 teilbar sind.

Mithilfe dieser zwei Beziehungen lassen sich oftmals allgemeine Aussagen zur Teilbarkeit durch 7 beweisen – auch ohne Zuhilfenahme des obigen Algorithmus, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel. An eine Zahl des Siebenereinmaleins werde die letzte Ziffer zweimal angehängt und dahinter noch die erste Ziffer gesetzt. Die neue Zahl ist dann ein Vielfaches von 7 (also durch 7 teilbar). So ist zum Beispiel mit 28 auch 28 882, mit 56 auch 56 665 ein Vielfaches von 7.

Allgemeiner Beweis. Da $z = 10a + b = 7n$ (also ein Vielfaches von 7) ist, ergibt sich die Beziehung $b = 7n - 10a$. Aus z wird nun nach der gegebenen Anweisung

$$z_1 = (10a + b) \cdot 1000 + 100b + 10b + a = (10a + b) \cdot 1000 + 110b + a.$$

Der erste der Summanden ist (wegen B1) durch 7 teilbar, für den Rest findet man unter Benutzung des obigen Wertes von b:

$$\begin{aligned} 110b + a &= 110(7n - 10a) + a \\ &= 770n - 1100a + a \\ &= 770n - 1099a \end{aligned}$$

Da sowohl 770 als auch 1099 durch 7 teilbar sind, gilt (nach B1 und B2): z_1 ist durch 7 teilbar.

2 Aufgaben

Aufgabe 1 (*). Löse die Knobelaufgaben a) und b) vom Anfang.

Aufgabe 2 (*). Wiederholt man eine zweiziffrige Zahl dreimal, so ist auch diese Zahl stets durch 7 teilbar. Beispiel: 232 323. Beweise, dass dies immer gilt!

Aufgabe 3 (*). Lassen sich die beiden Beziehungen B1 und B2 umkehren?
Die Frage lautet also im Fall der Summe: Wenn eine Summe $m + n$ durch k teilbar ist, sind dann auch immer beide Summanden m und n durch k teilbar?

a) Untersuche diesen Fall und begründe deine Antwort!

b) Formuliere die entsprechende Umkehraussage für ein Produkt und begründe auch hier deine Antwort.

Aufgabe 4 (*). Dieses Jahr fällt Weihnachten (24.12.2013) auf einen Dienstag. Begründe, warum 2014 Weihnachten auf einen Mittwoch fällt.

Aufgabe 5 (**). Es sei eine zweistellige Zahl vorgelegt, die die Quersumme 7 hat. Man erhält aus ihr Vielfache von 7, wenn man

a) die vordere Ziffer noch hinter die letzte Ziffer setzt;

   so wird aus 52 die durch 7 teilbare Zahl 525;

b) die Schlussziffer zweimal wiederholt;

   so wird aus 52 die durch 7 teilbare Zahl 5 222;

c) die Vorderziffer dreimal wiederholt;

   so wird aus 52 die durch 7 teilbare Zahl 55 552;

Beweise die drei Regeln allgemein!

Aufgabe 6 (**). In eine zweiziffrige Zahl des kleinen Siebenereinmaleins fügt man beliebig oft die Summe der beiden Ziffern ein und erhält immer eine durch 7 teilbare Zahl. So ist mit 21 auch 231, 2331, 23331, usw. durch 7 teilbar. Tritt eine zweiziffrige Zahl als Summe der beiden Ziffern auf, so ist die Einerzahl einzufügen und der Zehner in der voranstehenden Ziffer zu berücksichtigen. Also 56, 616, 6216, 62216 usw. Beweise dies allgemein!

Aufgabe 7. Beweise:

a) (**) Bei der Folge 1, 6, 6^2, 6^3, ... ist jeweils die *Summe zweier Nachbarzahlen* durch 7 teilbar.

b) (***) Bei der Folge 1, 8, 8^2, 8^3, ... ist die *Differenz von irgend zwei Zahlen* immer durch 7 teilbar.

Aufgabe 8 (***). Bilden die Ziffern einer Zahl eine arithmetische Folge, wie 1234 oder 2468 oder auch, wenn die Differenz negativ ist, 852 oder 9630, dann nennen wir das eine *Sequenzzahl*.

a) Hängt man an eine dreiziffrige Sequenzzahl die letzte Ziffer noch dreimal an, dann ist sie durch 7 teilbar. So ist z.B. 123 333 durch 7 teilbar. Beweise das allgemein!

b) Hängt man an eine fünfziffrige Sequenzzahl die zweite Ziffer an, dann ist die neue Zahl durch 7 teilbar. Beweise das allgemein!

c) Versuche, wenn du hinter den Kniff gekommen bist, auch für vier- und für sechsstellige Sequenzzahlen entsprechende Regeln zu gewinnen, die zu einer Teilbarkeit durch 7 führen.

Weiterführende Links

http://de.wikipedia.org/wiki/Sieben
http://de.wikipedia.org/wiki/Teilbarkeit#Teilbarkeit_durch_7
Tipps zum Bearbeiten einer Aufgabe/Wie beweise ich etwas?/Aktuelle Aufgaben:
http://www.mathematik.uni-r.de/schuelerzirkel/pmwiki/pmwiki.php?n=Main.Aufgaben
Musterthema/Aufgaben aus dem Schuljahr 2012/2013:
http://www.mathematik.uni-r.de/schuelerzirkel/pmwiki/pmwiki.php?n=Main.Aufgaben1213