Lösungen zum Thema Die verflixte 7

Lösung zu Aufgabe 1.

a) Die neue Zahl ist durch Multiplikation der zweiziffrigen Zahl mit 1001 entstanden. Die Zahl 1001 ist aber durch 7 teilbar ($1001 = 7 \cdot 143$), somit ist (nach B1) auch die neue Zahl durch 7 teilbar.

b) In diesem Fall wird zur neuen Zahl (aus a) noch 700 addiert. Somit werden zwei Zahlen addiert, die beide durch 7 teilbar sind, also ist (nach B2) auch die Summe durch 7 teilbar.

Lösung zu Aufgabe 2. In diesem Fall ist die neue Zahl durch Multiplikation der zweiziffrigen Zahl mit 10101 entstanden. Die Zahl 10101 ist durch 7 teilbar ($10101 = 7 \cdot 1443$), somit ist auch die neue Zahl durch 7 teilbar.

Lösung zu Aufgabe 3.

a) Die Umkehrung gilt im Fall der Summe nicht. Ein Gegenbeispiel ist: $11 + 4 = 15$. Die Zahl 15 ist durch 5 teilbar, aber weder 11 noch 4 sind durch 5 teilbar.

b) Die Fragestellung würde lauten: Wenn das Produkt zweier Zahlen m und n durch k teilbar ist, ist dann auch immer m oder n durch k teilbar? Ein Gegenbeispiel ist das Produkt $5 \cdot 4 = 20$, denn: Die Zahl 20 ist durch 10 teilbar, aber weder 5 noch 4 sind durch 10 teilbar.

Lösung zu Aufgabe 4. Das Jahr 2014 ist kein Schaltjahr, hat also 365 Tage. Die Zahl 364 ist durch 7 teilbar (damit ist 365 gleich 1 (mod 7), vgl. früheres Aufgabenblatt). Somit fällt Weihnachten 2014 auf den Wochentag nach Dienstag, also auf einen Mittwoch.

Lösung zu Aufgabe 5. Heißt die Ausgangszahl $x = 10a + b$, so ist hier immer $a + b = 7$ vorausgesetzt. Man kann die drei Regeln nun allgemein beweisen, indem man entweder $a = 7 - b$ oder $b = 7 - a$ in die aus x neu gebildete Zahl y einsetzt.

a) Es gilt

$$
\begin{aligned}
y &= 10x + a = 10(10a + b) + a = 100a + 10b + a = 101a + 10b = \\
&= 101(7 - b) + 10b = 707 - 101b + 10b = 707 - 91b
\end{aligned}
$$

Sowohl 707 ($707 = 7 \cdot 101$) als auch 91 ($91 = 7 \cdot 13$) sind durch 7 teilbar.

b) Man hat

$$
\begin{aligned}
y &= 100x + 10b + b = 100(10a + b) + 11b = 1000a + 100b + 11b = \\
&= 1000a + 111b = 1000(7 - b) + 111b = 7000 - 1000b + 111b = 7000 - 889b
\end{aligned}
$$

Sowohl 7000 ($7000 = 7 \cdot 1000$) als auch 889 ($889 = 7 \cdot 127$) sind durch 7 teilbar.

c) Es ist

$$y = 11100a + x = 11100a + (10a + b) = 11110a + b = 11110a + 7 - a = 11109a + 7$$

Sowohl 11109 ($11109 = 7 \cdot 1587$) als auch 7 sind durch 7 teilbar.

Lösung zu Aufgabe 6. Sei $z = 10a + b$ eine durch 7 teilbare Zahl. Man bildet

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 100a + 10(a + b) + b \\
&= 100a + 10a + 10b + b \\
&= 110a + 11b = 11(10a + b)
\end{aligned}
$$

Somit ist mit z auch z_1 durch 7 teilbar. Fügt man die Summe $a + b$ ein zweites Mal ein, erhält man

$$
\begin{aligned}
z_2 &= 1000a + 100(a + b) + 10(a + b) + b \\
&= 1000a + 100a + 10a + 100b + 10b + b \\
&= 1110a + 111b = 111(10a + b)
\end{aligned}
$$

Also ist auch z_2 durch 7 teilbar. Dies kann man nun beliebig fortsetzen (das ist z.B. durch Induktion zu zeigen).

Lösung zu Aufgabe 7. a) Durch Probieren mit kleinen n (z.B. $n = 1, 2, 3$) gelangt man zur Behauptung: Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$6^{n+1} + 6^n = 6^n \cdot 7$$

Beweis: Sei n eine natürliche Zahl. Dann ist:

$$6^{n+1} + 6^n = 6^n(6^1 + 6^0) = 6^n(6 + 1) = 6^n \cdot 7.$$

b) Zu zeigen ist: Für alle natürlichen Zahlen n und k ist $8^{n+k} - 8^n$ durch 7 teilbar.

Beweis: Seien n und k natürliche Zahlen. Dann gilt: $8^{n+k} - 8^n = 8^n(8^k - 1)$. Da $8 \equiv 1 \pmod 7$ (bei Division der 8 durch 7 bleibt Rest 1), ist $8^k \equiv 1^k \pmod 7$. Somit ist der Faktor $(8^k - 1)$ durch 7 teilbar.

Lösung zu Aufgabe 8. a) Im Folgenden ist a immer die erste Ziffer der Sequenzzahl und n bezeichnet die Schrittweite der Sequenz (n kann auch negativ sein). Die aus einer dreiziffrigen Sequenzzahl nach der Angabe neu gebildete Zahl hat die Form

$$100\ 000a + 10\ 000(a+n) + 1000(a+2n) + 111(a+2n) =$$
$$111\ 111a + 10\ 000n + 2000n + 222n =$$
$$111\ 111a + 12\ 222n$$

Sowohl $111\ 111 = 7 \cdot 15873$ als auch $12\ 222 = 7 \cdot 1746$ sind durch 7 teilbar.

b) Die aus einer fünfziffrigen Sequenzzahl nach der Angabe neu gebildete Zahl hat die Form

$$100\ 000a + 10\ 000(a+n) + 1000(a+2n) + 100(a+3n) + 10(a+4n) + a + n =$$
$$111\ 111a + 10\ 000n + 1000 \cdot 2n + 100 \cdot 3n + 10 \cdot 4n + n =$$
$$111\ 111a + 12\ 341n$$

Sowohl $111\ 111 = 7 \cdot 15873$ als auch $12\ 341 = 7 \cdot 1763$ sind durch 7 teilbar.

c) z.B.: An eine vierziffrige Sequenzzahl hängt man die zweite und die vierte Zahl an

$$100\ 000a + 10\ 000(a+n) + 1000(a+2n) + 100(a+3n) + 10(a+n) + a + 3n =$$
$$111\ 111a + 10\ 000n + 1000 \cdot 2n + 100 \cdot 3n + 10n + 3n =$$
$$111\ 111a + 12\ 313n$$

Sowohl $111\ 111 = 7 \cdot 15873$ als auch $12\ 313 = 7 \cdot 1759$ sind durch 7 teilbar. Bei einem Vorgehen analog zu den letzten Aufgaben erhielte man für eine sechsziffrige Sequenzzahl:

$$z = 111\ 111a + 12\ 345n$$

Aber 12 345 ist nicht durch 7 teilbar. Jedoch 111 111 111 111 ist durch 7 teilbar. Probiere also:

$$10^6 \cdot z + 111\ 111a = 111\ 111\ 111\ 111a + 12\ 345\ 000\ 000n.$$

Nun ist 12 345 000 000 nicht durch 7 teilbar, aber 12 345 000 003 wäre durch 7 teilbar. Also ist $10^6 \cdot z + 111\ 111a + 3n$ durch 7 teilbar. Dies lässt sich aber schreiben als $10^6 \cdot z + 111\ 110a + (a+3n)$. Der zweite Summand ($111\ 110a$) bedeutet hierbei, dass an z fünf Mal die erste Ziffer angehängt wird und der letzte Summand ($a+3n$) bedeutet, dass zum Schluss noch einmal die vierte Ziffer angehängt wird.

Beispiele sind 123 456 111 114 oder 876 543 888 885. An eine sechsziffrige Sequenzzahl kann man also z.B. fünfmal die erste Ziffer und einmal die vierte anhängen.