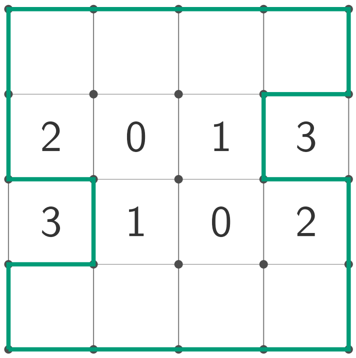
Schülerzirkel Mathematik
Fakultät für Mathematik. Universität Regensburg

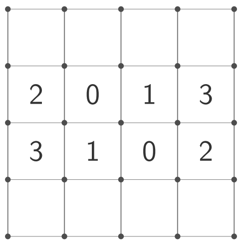


Zahlenschleifen

Das Slitherlink-Puzzle von nikoli

1 Die Regeln von Slitherlink

Slitherlink ist eines von vielen Puzzles, die von nikoli (http://www.nikoli.co.jp) entwickelt wurden. Ein Slitherlink-Puzzle besteht aus einem quadratischen Gitter, bei dem in gewissen Feldern Zahlen eingetragen sind. Zum Beispiel:



Das Ziel ist es nun, aus den Gitterkanten einen geschlossenen Weg (man sagt auch: eine geschlossene Schleife) zu formen, die im folgenden Sinn mit den vorgegebenen Zahlen kompatibel ist:

Thema vom 15. November 2013. Einsenden der Lösungen bis 10. Januar 2014.
Schülerzirkel Mathematik, Fakultät für Mathematik, 93040 Regensburg
http://www.mathematik.uni-r.de/schuelerzirkel, schueler.zirkel@mathematik.uni-regensburg.de

SL 1 Benachbarte Gitterpunkte werden so durch vertikale oder horizontale Kanten verbunden, dass sich insgesamt eine geschlossene Schleife ergibt.

SL 2 Die Zahlen geben an, wieviele der Kanten des Feldes zur Schleife gehören. Bei leeren Feldern ist die Anzahl der Kanten, die zur Schleife gehören, nicht vorgegeben.

SL 3 Die Schleife hat keine Selbstüberkreuzungen und keine Abzweigungen.

(Außerdem gibt es Varianten von Slitherlink, die nicht auf quadratischen Gittern, sondern auf allgemeineren Zellenzerlegungen von Flächen beruhen; der Übersichtlichkeit halber beschränken wir uns im folgenden aber auf Quadratgitter.)

Knobelaufgabe. Bevor Du weiterliest, solltest Du Dich zuerst selbst davon überzeugen, dass das obige Slitherlink-Puzzle nur genau eine Lösungsschleife besitzt.

2 Lösungsstrategien für Slitherlink-Puzzle

Wie kann man Slitherlink-Puzzles lösen? Grob lassen sich die Lösungsstrategien für Slitherlink-Puzzles in zwei Gruppen aufteilen:

- Lokale Strategien sind Strategien, die auf Ausschnitte des Puzzles anwendbar sind, und nur die Information aus diesem Ausschnitt verwenden. Lokale Strategien beruhen im wesentlichen auf den Regeln SL 2 und SL 3 .

- Globale Strategien sind Strategien, die Informationen über das gesamte Puzzle (und nicht nur über einen kleinen Ausschnitt) benötigen. Globale Strategien beruhen im wesentlichen auf den Regeln SL 1 und SL 3 .

Wir stellen nun eine Auswahl an lokalen und globalen Lösungsstrategien vor.

2.1 Lokale Strategien

Wir beginnen mit lokalen Strategien. Eine Auswahl lokaler Strategien ist in Abbildung 1 angegeben. Haben wir uns bereits überlegt, dass eine Kante nicht Teil einer Lösungsschleife sein kann, so notieren wir dies durch eine durchgestrichene Kante: $\times$. Haben wir uns bereits überlegt, dass eine Kante Teil aller Lösungsschleifen sein muss, so notieren wir dies durch eine farbige Kante: .

Wir geben exemplarisch eine Begründung für die zweite Strategie: Da genau drei Kanten des linken unteren Feldes zur Lösung gehören müssen, können nicht sowohl die obere als auch die rechte Kante des linken unteren Feldes *nicht* zur Lösung gehören. Es kann aber auch nicht nur eine dieser beiden Kanten zur Lösung gehören, da Lösungsschleifen geschlossen sein müssen, eine solche Schleife also nicht enden darf. Also sind die obere und die rechte Kante in jeder Lösungsschleife enthalten. Analog kann man auch die anderen angegebenen lokalen Strategien begründen.

Wenn dieser Teil der Lösung bereits bekannt ist . . . können wir auf folgendes schließen:

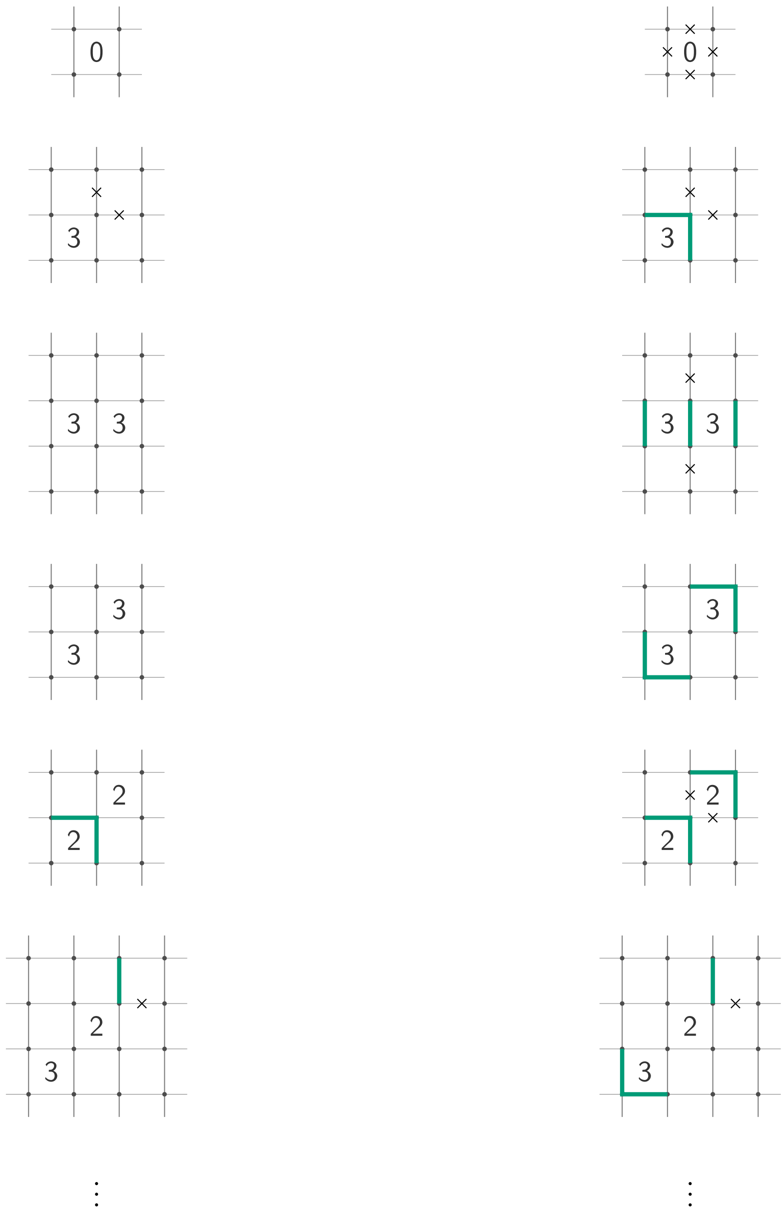


Abbildung 1: Eine Auswahl lokaler Strategien

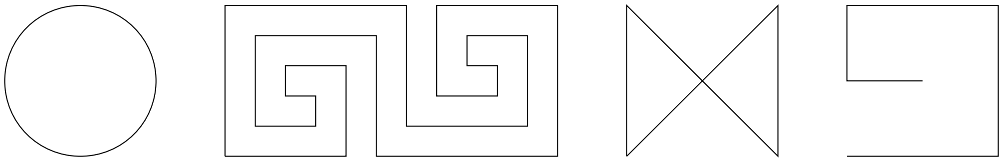


Abbildung 2: Kurven in der Ebene. Die linken beiden Kurven sind einfach geschlossene Kurven, die rechten beiden nicht (da sie im Gegensatz zur Kreislinie Selbstüberkreuzungen haben bzw. nicht geschlossen sind).

2.2 Globale Strategien

Es gibt auch Lösungsstrategien für Slitherlink-Puzzles, die nicht lokal, sondern global sind, und darauf beruhen, dass Lösungen geschlossene Schleifen bilden müssen.

Ein schönes Beispiel für eine globale Strategie erhält man mit dem folgenden Resultat aus der Topologie – einem Teilgebiet der Mathematik, das sich mit der Geometrie deformierbarer Objekte beschäftigt.

Satz (Jordanscher Kurvensatz). *Jede einfach geschlossene Kurve in der Ebene zerlegt die Ebene in genau zwei Gebiete. Der Rand dieser beiden Gebiete ist die gegebene geschlossene Kurve.*

Eine einfach geschlossene Kurve in der Ebene ist dabei eine Teilmenge der Ebene, die topologisch äquivalent („homöomorph“) zu einer Kreislinie ist, d.h. eine Teilmenge, die nur durch Knautschen, Dehnen, Ziehen, Herumdrücken, aber ohne zu Zerschneiden oder zu Verkleben in die Kreislinie überführt werden kann. (Nicht-)Beispiele für einfach geschlossene Kurven finden sich in Abbildung 2. Dieser Satz mag zunächst sehr plausibel erscheinen, es ist jedoch nicht ganz einfach einen rigorosen Beweis dafür zu geben.

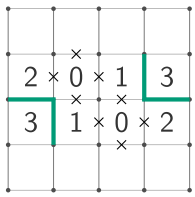
Wie kann der Jordansche Kurvensatz beim Lösen von Slitherlink-Puzzlen behilflich sein? Nach dem Jordanschen Kurvensatz zerlegt jede Lösungsschleife das Puzzle in genau zwei Gebiete: das von der Kurve umschlossene „innere“ Gebiet, und das „äußere“ Gebiet.

In manchen Fällen kann dies helfen, zu bestimmen, ob eine gewisse Kante zu einer Lösungsschleife gehört oder nicht. Zum Beispiel folgt aus dem Jordanschen Kurvensatz (da sich an jeder Kante die Gebiete „abwechseln“ und das gesamte Puzzle vom äußeren Gebiet umgeben ist), dass

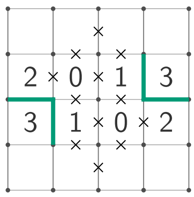
- jede Lösungsschleife in jeder Zeile des Puzzles eine gerade Anzahl von vertikalen Kanten besitzt
- und analog in jeder Spalte eine gerade Anzahl von horizontalen Kanten besitzt.

2.3 Lösung des Beispiel-Puzzles

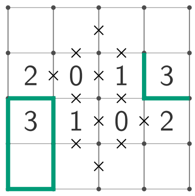
Mit den ersten beiden lokalen Strategien aus Abbildung 1 erhalten wir:



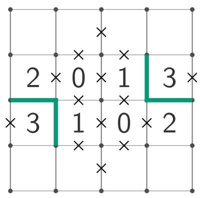
bzw.



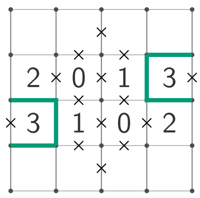
Angenommen, die linke Kante des unteren mit 3 gefüllten Feldes wäre Teil einer Lösung. Da Lösungsschleifen nicht enden dürfen, erhalten wir daraus:



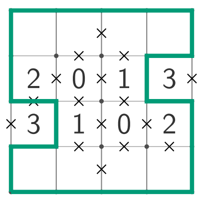
Da es jetzt aber keine Möglichkeit gibt, die bereits bekannten Schleifenstücke zu einer einzigen geschlossenen Schleife zusammenzusetzen (dies ist ein globales Argument!), kann also die linke Kante des unteren mit 3 gefüllten Feldes nicht Teil einer Lösung sein. Somit erhalten wir (indem wir das Argument auch auf das obere mit 3 gefüllte Feld anwenden):



bzw.



Indem wir nun berücksichtigen, dass Lösungsschleifen nicht enden dürfen und, dass jeweils genau zwei der Kanten, der mit 2 beschrifteten Felder, Teil von Lösungsschleifen sind, erhalten wir als einzige Lösung des Beispiel-Puzzles:

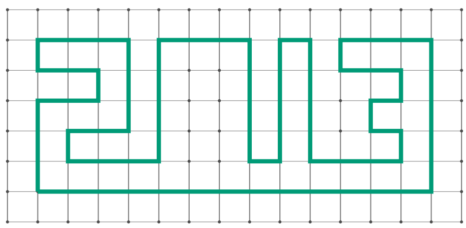


3 Aufgaben

Aufgabe 1 (Slitherlink-Puzzle*). Löse das folgende Slitherlink-Puzzle:

1				3							2
		1			3	3	3	3		3	
3	3	3	3	1					1		
			1			1		1			
	3					3			3		2
2					2	3			3		1

Aufgabe 2 (Slitherlink-Puzzle, rückwärts*). Gib ein Slitherlink-Puzzle an, das eindeutig lösbar ist und dessen Lösungskurve wie folgt aussieht (und begründe Deine Antwort):



Aufgabe 3 (lokale Bedingungen*). Welche der folgenden vier Konfigurationen können als Teil in einem (evtl. größeren) Slitherlink-Puzzle, das mindestens eine Lösung besitzt, auftreten? Begründe Deine Antwort!

		3
	3	
3		

2	2	2
2	2	2
2	2	2

								3
							2	
						3		
					1			
				1				
			1					
		3						
	2							
3								

2			
	0		
		1	
2	0	1	3
		1	
	0		
2			

Aufgabe 4 (Länge von Lösungskurven*). Sei ein Slitherlink-Puzzle gegeben, bei dem in jedem Feld eine Zahl steht. Außerdem sei vorausgesetzt, dass in allen Randfeldern 0 steht. Zum Beispiel:

0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	3	2	0	0
0	1	2	3	1	0
0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0

1. Wie kann man in einem solchen Fall – ohne das Puzzle zu lösen – die Länge der Lösungskurve bestimmen? Begründe Deine Antwort!

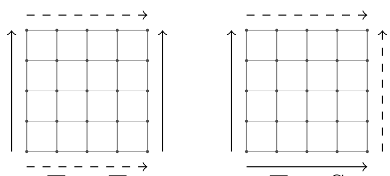
2. Funktioniert Dein Verfahren auch dann noch, wenn man nicht voraussetzt, dass die Randfelder mit 0 gefüllt sind? Begründe Deine Antwort!

Aufgabe 5 (Slitherlink-Puzzles mit eingschränkten Zahlen).**

1. Gibt es ein lösbares Slitherlink-Puzzle, bei dem in jedem Feld eine Zahl steht, aber nur die Zahlen 0 und 1 verwendet werden? Begründe Deine Antwort!

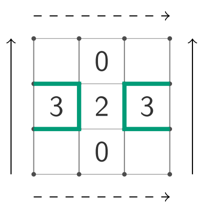
2. Für welche natürlichen Zahlen n und m gibt es ein $n \times m$-Slitherlink-Puzzle, das mindestens eine Lösung besitzt, und bei dem jedes Feld mit der Zahl 2 beschriftet ist? Begründe Deine Antwort!

Aufgabe 6 (Verklebte Puzzles*).** Wir betrachten folgende Puzzle-Varianten: Statt der gewöhnlichen ebenen Slitherlink-Puzzles verkleben wir die Ränder der Puzzles wie in den Skizzen angegeben; beim Typ T werden also die linke und die rechte vertikale Seite miteinander verklebt und die untere mit der oberen horizontalen Seite.



Typ T Typ S

Also ist zum Beispiel



ein korrekt gelöstes (kleines) Puzzle vom Typ T.

1. Was für ein Gebilde ergibt sich bei der Verklebung vom Typ T? Was für eines beim Typ S? Skizziere die Gebilde! Stelle Dir dazu am besten vor, dass die Puzzles auf einer flexiblen gummiartigen Oberfläche aufgedruckt sind.
2. Gilt auch im Typ T der Jordansche Kurvensatz? D.h. zerlegt jede einfach geschlossene Kurve in einem Puzzle vom Typ T das Gebilde vom Typ T in genau zwei Gebiete? Begründe Deine Antwort!
3. Gilt auch im Typ S der Jordansche Kurvensatz? D.h. zerlegt jede einfach geschlossene Kurve in einem Puzzle vom Typ S das Gebilde vom Typ S in genau zwei Gebiete? Begründe Deine Antwort!

Weiterführende Links

http://www.nikoli.co.jp/en/puzzles/slitherlink.html
http://www.mathematik.uni-r.de/loeh/seminars/invarianten.pdf
http://www.mathematik.uni-r.de/loeh/seminars/iib.pdf