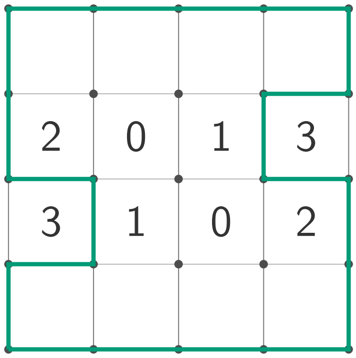
Schülerzirkel Mathematik
Fakultät für Mathematik. Universität Regensburg



Zahlenschleifen

Das Slitherlink-Puzzle von nikoli

Aufgaben und Lösungen

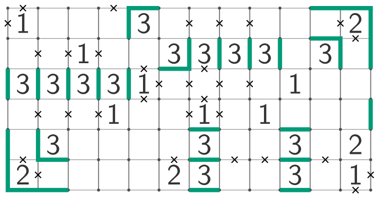
Aufgabe 1 (Slitherlink-Puzzle*). Löse das folgende Slitherlink-Puzzle:

1				3							2
		1			3	3	3	3		3	
3	3	3	3	1					1		
			1			1		1			
	3					3			3		2
2					2	3			3		1

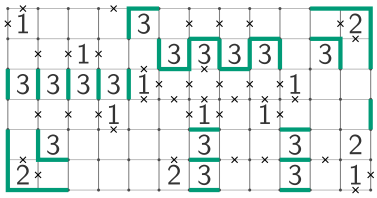
Lösung. Wir wenden zunächst die dritte und vierte lokale Lösungsstrategie an und analysieren dann die vier Ecken des Slitherlink-Puzzles. Dies liefert:

Thema vom 15. November 2013. Einsenden der Lösungen bis 10. Januar 2014.

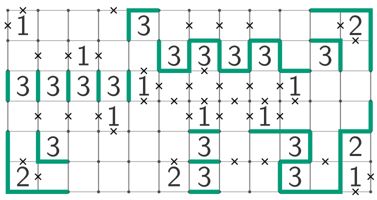
Schülerzirkel Mathematik, Fakultät für Mathematik, 93040 Regensburg
http://www.mathematik.uni-r.de/schuelerzirkel, schueler.zirkel@mathematik.uni-regensburg.de



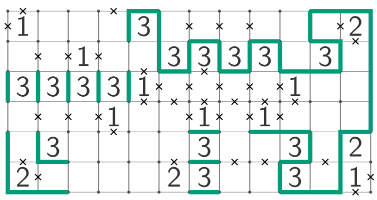
Nun betrachten wir den oberen Dreierblock und ergänzen die Informationen zu den mit 1 beschrifteten Feldern:



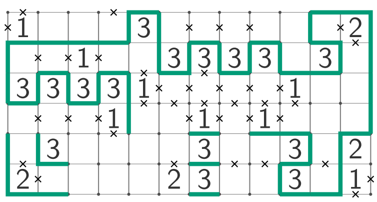
Da Lösungskurven geschlossen sind, wissen wir daher wie der untere rechte Dreierblock und dessen Umgebung aussehen müssen und wie das rechte Ende des oberen Dreierblocks fortgesetzt wird:



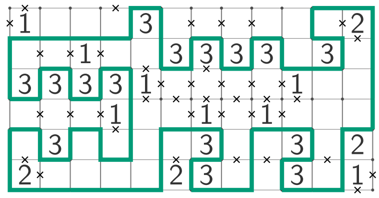
Mit dem Jordanschen Kurvensatz sehen wir jetzt, dass die Felder oberhalb des oberen Dreierblocks außerhalb des von jeder Lösungskurve eingeschlossenen Gebiets liegen. Also erhalten wir den folgenden Verlauf:



Betrachtet man nun die mit 1 beschrifteten Felder im linken oberen Viertel genauer, so sieht man, wie Lösungskurven den linken Dreierblock durchqueren müssen:

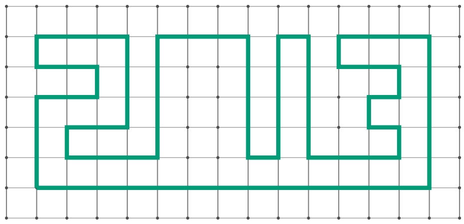


Es bleibt nur noch, die Lösungen in der linken unteren Ecke zu verfolgen und mit dem mit 2 beschrifteten Feld in der Mitte der unteren Zeile zu kombinieren:

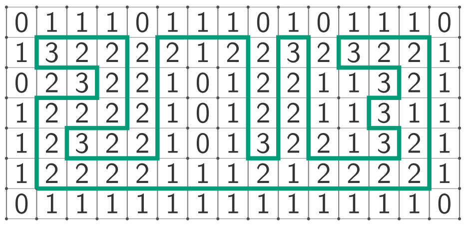


Diese Kurve ist somit die (einzige) Lösung des angegebenen Slitherlink-Puzzles. ◻

Aufgabe 2 (Slitherlink-Puzzle, rückwärts*). Gib ein Slitherlink-Puzzle an, das eindeutig lösbar ist und dessen Lösungskurve wie folgt aussieht (und begründe Deine Antwort):

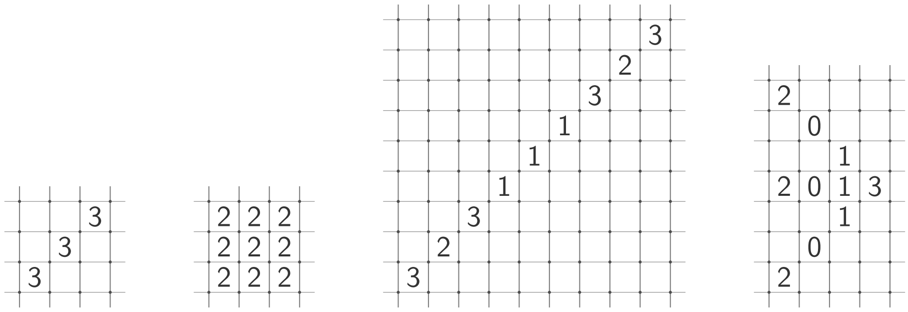


Lösung. Wir tragen in jedes Feld dieses Quadratgitters ein, wieviele Kanten der vorgegebenen Kurve zu diesem Feld gehören; dies liefert folgendes Slitherlink-Puzzle:



Nach Konstruktion löst die vorgegebene Kurve dieses Slitherlink-Puzzle. Mit analogen Argumenten wie in der Lösung von Aufgabe 1 kann man nun einsehen, dass dieses Slitherlink-Puzzle außer der vorgegebenen Kurve keine weiteren Lösungen besitzt. (Man kann nun natürlich noch aus vielen Feldern die Zahlen entfernen ohne die eindeutige Lösbarkeit zu zerstören.) ◻

Aufgabe 3 (lokale Bedingungen*). Welche der folgenden vier Konfigurationen können als Teil in einem (evtl. größeren) Slitherlink-Puzzle, das mindestens eine Lösung besitzt, auftreten? Begründe Deine Antwort!



Lösung.

1. Die erste Konfiguration kann *nicht* auftreten, denn: Aus der vierten lokalen Strategie erhalten wir, dass die folgenden Kurven Teil jeder Lösung sein müssen:

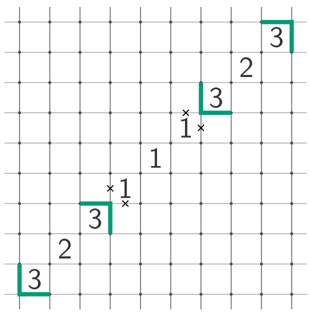
   Insbesondere wären dann aber vier der Kanten des zentralen Feldes Teil jeder Lösung, was nicht sein kann.

2. Die zweite Konfiguration kann auftreten, denn: Das Slitherlink-Puzzle links wird zum Beispiel von der Kurve rechts gelöst:

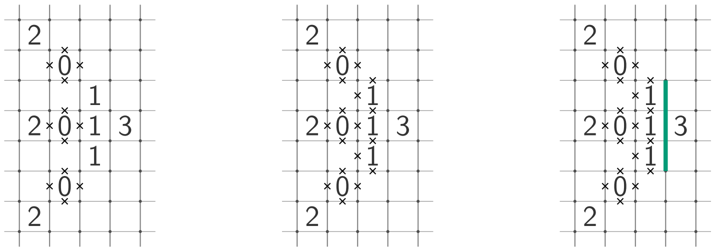
   gelöst.

3. Die dritte Konfiguration kann *nicht* auftreten, denn: Ähnlich zur vierten lokalen Strategie sieht man, dass folgende Kurvenstücke Teil jeder Lösungskurve sein müssen:

Also ist entweder die rechte oder die obere Kante des unteren mit 1 beschrifteten Feldes Teil jeder Lösungskurve; analog ist entweder die linke oder die untere Kante des oberen mit 1 beschrifteten Feldes Teil jeder Lösungskurve. Dann ist aber sowohl die untere oder die linke als auch die obere oder die rechte Kante des zentralen Feldes Teil jeder Lösungskurve. Dies kann aber nicht sein, da nur genau eine der Kanten des zentralen Feldes Teil einer Lösung sein darf.

4. Die vierte Konfiguration kann *nicht* auftreten, denn: Die mit 0 bzw. 1 beschrifteten Felder liefern:



Nun gibt es aber keine Möglichkeit mehr, das rechte, mit 3 beschriftete, Feld korrekt in eine Lösungskurve einzubinden.

Aufgabe 4 (Länge von Lösungskurven*). Sei ein Slitherlink-Puzzle gegeben, bei dem in jedem Feld eine Zahl steht. Außerdem sei vorausgesetzt, dass in allen Randfeldern 0 steht. Zum Beispiel:

0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	3	2	0	0
0	1	2	3	1	0
0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0

1. Wie kann man in einem solchen Fall – ohne das Puzzle zu lösen – die Länge der Lösungskurve bestimmen? Begründe Deine Antwort!

2. Funktioniert Dein Verfahren auch dann noch, wenn man nicht voraussetzt, dass die Randfelder mit 0 gefüllt sind? Begründe Deine Antwort!

Lösung.

1. Die Länge jeder Lösungskurve ist

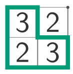
$$\frac{1}{2} \cdot \text{Summe der Zahlen in allen Feldern,}$$

denn: Da die Randfelder mit 0 beschriftet sind, ist jede Kante jeder Lösungskurve Kante von genau zwei Feldern des Slitherlink-Puzzles. Also wird in der Summe der Zahlen aller Felder jede Kante genau zweimal gezählt.

2. Nein, denn: Wir betrachten das folgende Slitherlink-Puzzle:

3	2
2	3

Dann ist $\frac{1}{2} \cdot (3 + 2 + 2 + 3) = 5$ die Hälfte der Summe aller Zahlen in diesem Slitherlink-Puzzle, aber



ist eine Lösungskurve dieses Puzzles mit der Länge 8.

Aufgabe 5 (Slitherlink-Puzzles mit eingeschränkten Zahlen**).

1. Gibt es ein lösbares Slitherlink-Puzzle, bei dem in jedem Feld eine Zahl steht, aber nur die Zahlen 0 und 1 verwendet werden? Begründe Deine Antwort!

2. Für welche natürlichen Zahlen n und m gibt es ein $n \times m$-Slitherlink-Puzzle, das mindestens eine Lösung besitzt, und bei dem jedes Feld mit der Zahl 2 beschriftet ist? Begründe Deine Antwort!

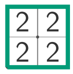
Lösung.

1. Nein, denn: Der pathologische Fall, dass in allen Feldern 0 steht und die Lösungskurve die Länge 0 hat, sei hierbei ignoriert. Wir nehmen also an, dass jede Lösungskurve mindestens eine Kante enthält. Jede geschlossene Schleife in einem Quadratgitter besitzt eine vertikale Kante, die unter den vertikalen Kanten am weitesten rechts und unter diesen rechtesten Kanten am weitesten oben liegt. Da es sich um die oberste rechteste Kante handelt, kann die Schleife am oberen Ende dieser vertikalen Kante nicht nach oben oder rechts fortgesetzt werden. Das Feld, das links an diese vertikale Kante angrenzt, enthält also mindestens zwei Kanten dieser Lösungsschleife und ist somit *nicht* mit 0 oder 1 beschriftet.

2. Ein solches Slitherlink-Puzzle gibt es genau im Fall $n = 2 = m$, denn: Das Slitherlink-Puzzle

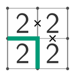
2	2
2	2

besitzt

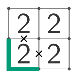


als Lösungskurve.

Wieso kann es für $n \neq 2$ oder $m \neq 2$ kein solches Slitherlink-Puzzle geben? Ohne Einschränkung sei $n \geq m$. Ist $m < 2$, so besitzt das entsprechende Slitherlink-Puzzle offenbar keine Lösung. Sei also nun $m \geq 2$ und $n > 2$. Wir betrachten zunächst die linke untere Ecke des Slitherlink-Puzzles. Dort muss jede Lösungskurve eine der beiden folgenden Gestalten haben:

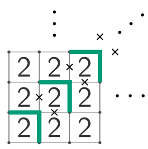


A

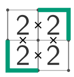


B

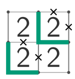
Im Fall A folgt induktiv mit der fünften lokalen Strategie, dass die entsprechende Lösungskurve folgende Form hat:



Fall B können wir wieder in zwei Fälle unterteilen:

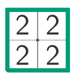


B1

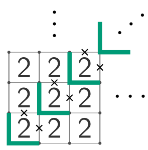


B2

Im Fall B1 muss die Lösungskurve dann jedoch

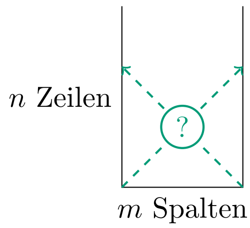


sein, im Widerspruch zu $n > 2$. Also liegt Fall B2 vor. In diesem Fall erhalten wir dann induktiv mit demselben Argument, dass die entsprechende Lösungskurve die folgende Form hat:



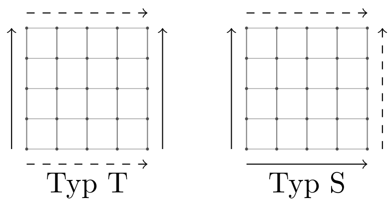
Analoge Argumente treffen auch auf die rechte untere Ecke des Slitherlink-Puzzles zu.

Wegen $n \geq m$ treffen sich die von der linken unteren Ecke bzw. der rechten unteren Ecke ausgehenden Diagonalen in einem Feld oder es gibt einen 2×2-Bereich in diesem Slitherlink-Puzzle, so dass die eine Diagonale auf der von der linken unteren Ecke ausgehenden Diagonale liegt und die andere auf der von der rechten unteren Ecke ausgehenden Diagonalen liegt:

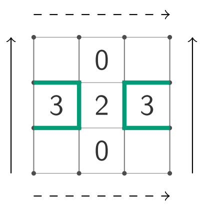


Da jedes dieser Felder aber auch nur genau zwei Kanten jeder Lösungskurve enthalten darf, widerspricht dies der obigen Tatsache, dass jede Lösung auf diesen beiden Diagonalen „Winkelketten" wie in Fall A bzw. B2 enthält.

Aufgabe 6 (Verklebte Puzzles*).** Wir betrachten folgende Puzzle-Varianten: Statt der gewöhnlichen ebenen Slitherlink-Puzzles verkleben wir die Ränder der Puzzles wie in den Skizzen angegeben; beim Typ T werden also die linke und die rechte vertikale Seite miteinander verklebt und die untere mit der oberen horizontalen Seite.



Also ist zum Beispiel



ein korrekt gelöstes (kleines) Puzzle vom Typ T.

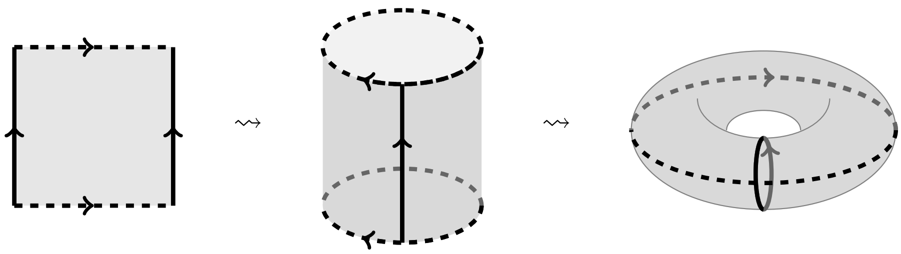
1. Was für ein Gebilde ergibt sich bei der Verklebung vom Typ T? Was für eines beim Typ S? Skizziere die Gebilde! Stelle Dir dazu am besten vor, dass die Puzzles auf einer flexiblen gummiartigen Oberfläche aufgedruckt sind.

2. Gilt auch im Typ T der Jordansche Kurvensatz? D.h. zerlegt jede einfach geschlossene Kurve in einem Puzzle vom Typ T das Gebilde vom Typ T in genau zwei Gebiete? Begründe Deine Antwort!

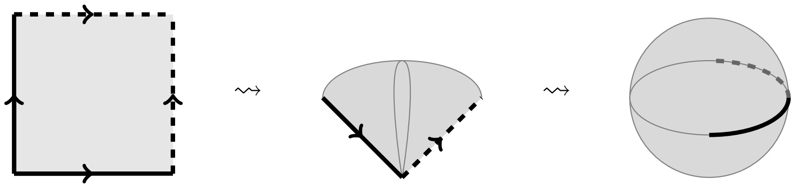
3. Gilt auch im Typ S der Jordansche Kurvensatz? D.h. zerlegt jede einfach geschlossene Kurve in einem Puzzle vom Typ S das Gebilde vom Typ S in genau zwei Gebiete? Begründe Deine Antwort!

Lösung.

1. Verklebung vom Typ T liefert einen sogenannten *Torus* (sozusagen die Oberfläche eines Schwimmrings): Verkleben der linken und rechten Kante liefert eine Röhre; das Verkleben der verbleibenden beiden Kanten ergibt dann den Torus.



Verklebung vom Typ S liefert ein „aufgeblasenes“ Dreieck; bis auf Dehnen etc. ist dies nichts anderes als die Oberfläche einer Kugel.



2. Nein, denn: Zum Beispiel zerlegt die einfach geschlossene Kurve

0	1	1	0
0	1	1	0
0	1	1	0
0	1	1	0

Typ T

den Torus nicht in zwei Gebiete: Durch die Verklebung der rechten und linken Kante bleibt es bei einem zusammenhängenden Gebilde (das – nach Verkleben der oberen und unteren Kante – aussieht wie eine Röhre).

3. Ja, denn: Wir stellen uns Flächen vom Verklebungstyp S als Kugeloberfläche vor und nehmen an, dass unsere einfach geschlossene Kurve nicht durch den Nordpol geht. Entfernt man nun den Nordpol, so kann man das restliche Gebilde an diesem Loch aufweiten und plattdrücken und erhält so bis auf Dehnen etc. die Ebene. Mit dem Jordanschen Kurvensatz folgt, dass unsere Kurve auf der Kugeloberfläche diese Ebene in genau zwei Gebiete zerlegt. Nun machen wir die Entfernung des Nordpols rückgängig und sehen so, dass auch die Kugeloberfläche durch die einfach geschlossene Kurve in genau zwei Gebiete zerlegt wird.