Schülerzirkel Mathematik
Fakultät für Mathematik. Universität Regensburg

Lösungen zum Thema Unendliche Mengen

Die meisten Aufgaben lösen wir mit einem indirekten Beweis, siehe Hilfsblatt *Wie beweise ich etwas?*.

Lösung zu Aufgabe 1.

a) Michis Behauptung ist falsch. Wenn Michis Aufzählmethode stimmen würde, so könnte man die natürlichen Zahlen mit den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 2000$ durchnummerieren. Dann wäre die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ endlich. Aber in Beispiel 1 haben wir gesehen, dass diese Menge gerade nicht endlich (das heißt unendlich) ist.

b) Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ hat die unendliche Teilmenge $\mathbb{N}$ und ist damit nach Beispiel 2 selbst unendlich.

Lösung zu Aufgabe 2. Wir geben jeder natürlichen Zahl ein Minus und bekommen die Menge $-\mathbb{N} = \{0, -1, -2, -3, -4, \ldots\}$. Diese Menge besitzt ein Maximum und zwar ist das Maximum 0. Außerdem sehen wir, dass diese Menge unendlich ist, indem wir den Beweis für die Unendlichkeit der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ein wenig abändern (ersetze „echt kleiner" durch „echt größer" und ersetze „$+1$" durch „-1"). Dass $-\mathbb{N}$ unendlich ist, kann man auch aus der Unendlichkeit von $\mathbb{N}$ folgern: Wäre $-\mathbb{N}$ endlich, d.h. für ein n ließen sich die Elemente von $-\mathbb{N}$ durch $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aufzählen, dann wäre $-x_1, -x_2, -x_3, \ldots, -x_n$ eine Aufzählung der Menge $\mathbb{N}$. Dies würde bedeuten, dass $\mathbb{N}$ endlich wäre, was nicht sein kann.

Alternative Lösung: Nach Aufgabe 3 ist $\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ eine unendliche Menge. Diese besitzt ein Maximum, nämlich $\frac{1}{1}$.

Lösung zu Aufgabe 3. Der Buchstabe M stehe für die Menge $\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$. Jedes Element von M lässt sich schreiben als ein Bruch $\frac{1}{m+1}$ für eine eindeutige natürliche Zahl m und für jedes m von $\mathbb{N}$ ist $\frac{1}{m+1}$ ein Element von M. Also können wir die Elemente von $\mathbb{N}$ und M identifizieren

m	0	1	2	3	4	$\ldots$
$\frac{1}{m+1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\ldots$

Schülerzirkel Mathematik, Fakultät für Mathematik, 93040 Regensburg
http://www.mathematik.uni-r.de/schuelerzirkel, schueler.zirkel@mathematik.uni-regensburg.de

Wir führen nun die Annahme, dass M endlich ist, zu einem Widerspruch. Ließen sich die Elemente von M für eine natürliche Zahl n mit $1, 2, 3, \ldots, n$ durchnummerieren, dann gäbe es eine Aufzählung der Form $\frac{1}{m_1+1}, \frac{1}{m_2+1}, \frac{1}{m_3+1}, \ldots, \frac{1}{m_n+1}$ für natürliche Zahlen $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$. Weil diese Aufzälung alle Elemente von M erwischt, ist nach obiger Identifikation $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ eine Aufzählung der natürlichen Zahlen. Dies widerspricht der Tatsache, dass $\mathbb{N}$ nicht endlich ist. Damit ist die Annahme, dass M endlich ist, falsch, also ist M ist unendlich.

Lösung zu Aufgabe 4.

a) Sei T eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$. Wäre T beschränkt, so gäbe es eine positive ganze Zahl m, so dass jedes Element von T zwischen $-m$ und m liegen würde. Dann wäre T eine Teilmenge der Menge $\{-m, -m+1, -m+2, \ldots, m-2, m-1, m\}$, welche endlich ist (denn $-m, -m+1, -m+2, \ldots, m-2, m-1, m$ ist eine Aufzählung dieser Menge). Nach Beispiel 2 kann aber T keine Teilmenge einer endlichen Menge sein. Also ist T nicht beschränkt.

b) Sei T eine nicht beschränkte Teilmenge von $\mathbb{N}$. Wäre T endlich, so gäbe es eine Aufzählung $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Dann wäre jedes Element von T kleiner gleich der Zahl $m = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$, würde also zwischen $-m$ und m liegen. Das kann nicht sein, denn T is nicht beschränkt. Also ist T unendlich.

Bemerkung: In der Teilaufgabe a) kann man auf die Voraussetzung, dass T eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist, nicht verzichten. Zum Beispiel ist die Menge $\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ aus Aufgabe 3 (keine Teilmenge von $\mathbb{N}$) beschränkt, aber nicht endlich.

Lösung zu Aufgabe 5. Jeder Hotelgast wird angewiesen in die dreifache Zimmernummer weiterzuziehen. Das heißt Gast aus Zimmer 1 zieht ins Zimmer 3, Gast aus Zimmer 2 zieht ins Zimmer 6, Gast aus Zimmer 3 zieht ins Zimmer 9, uns so weiter. Dann sind die Zimmer mit den Nummern $3m + 1$ und $3m + 2$ für alle natürliche Zahlen m frei. Die Fahrgäste des ersten Busses bekommen die Zimmer mit den Nummern $3m + 1$: Fahrgast vom Sitz 1 bekommt Zimmer $0 + 1 = 1$, Fahrgast vom Sitz 2 bekommt Zimmer $3 + 1 = 4$, Fahrgast vom Sitz 3 bekommt Zimmer $6 + 1 = 7$, und so weiter. In die restlichen Zimmer können die Fahrgäste des zweiten Busses ziehen: Fahrgast vom Sitz 1 bekommt Zimmer $0 + 2 = 2$, Fahrgast vom Sitz 2 bekommt Zimmer $3 + 2 = 5$, Fahrgast vom Sitz 3 bekommt Zimmer $6 + 2 = 8$, und so weiter.

Alternative Lösung: Wir haben bereits gesehen, dass durch Umziehen der Hotelgäste genug Zimmer frei werden, dass die Fahrgäste des ersten Busses einziehen können. Wenn diese es sich bequem gemacht haben und nun zu den Hotelgästen gehören, lassen wir alle Hotelgäste nochmal umziehen, damit auch die Fahrgäste des zweiten Busses Platz finden.

Lösung zu Aufgabe 6.

a) Sei U eine unendliche Menge. Wir zeigen, dass U verschiedene Elemente $u_0, u_1, u_2, \ldots$ (für jede natürliche Zahl m ein Element u_m) besitzt. Dabei bedeutet verschieden, dass je zwei dieser Elemente mit unterschiedlicher Nummer nicht gleich sind. Dazu gehen wir wie bei einer vollständigen Induktion vor.

Zuerst wählen wir ein Element u_0 in U.

Induktionsvoraussetzung. Sei m eine natürliche Zahl und seien bereits verschiedene Elemente $u_0, u_1, \ldots, u_m$ gefunden.

Induktionsschritt. Dann finden wir ein u_{m+1} in U, welches nicht in der Menge $\{u_0, u_1, \ldots, u_m\}$ liegt. Denn gäbe es außerhalb dieser Menge kein Element von U, dann wäre $u_0, u_1, \ldots, u_m$ eine Aufzählung von U und U wäre endlich.

Damit haben wir verschiedene Elemente $u_0, u_1, u_2, \ldots$ von U gefunden. Die Teilmenge $\{u_0, u_1, u_2, \ldots\}$ von U, welche wir ab jetzt mit T bezeichnen, ist unendlich, denn: Wir können die Mengen $\mathbb{N}$ und T identifizieren, indem wir jeder natürlichen Zahl m das Element u_m von T zuordnen. Wie in der Lösung von Aufgabe 3 folgt aus der Unendlichkeit von $\mathbb{N}$, dass T unendlich ist.

Also ist T eine abzählbar unendliche Teilmenge von U.

b) Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Menge, deren Elemente die Teilmengen von $\mathbb{N}$ sind. Diese Menge heißt auch *Potenzmenge von* $\mathbb{N}$. Zum Beispiel sind $\{0\}$, $\{2, 200\}$, $\mathbb{N}$ Elemente von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, aber 1 kein Element von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, weil 1 keine Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist.

Die Menge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist nach Beispiel 2 unendlich, denn sie besitzt die Teilmenge

$$\{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots\},$$

welche sich mit der Menge $\mathbb{N}$ identifiziert und damit unendlich ist.

Wäre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ abzählbar unendlich, so gäbe es Teilmengen $M_0, M_1, M_2, \ldots$ von $\mathbb{N}$, so dass jede Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ gleich M_m für eine natürliche m Zahl ist. Sei $M_0, M_1, M_2, \ldots$ eine solche Aufzählung. Wir zeigen, dass dies zu einem Widerspruch führt. Betrachte dazu die Menge M aller natürlichen Zahlen n, für die gilt, dass n kein Element von M_n ist. Das heißt

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin M_n\}.$$

Dann muss es eine natürliche Zahl m geben mit der Eigenschaft $M_m = M$. Die Zahl m kann nicht in M liegen, denn sonst wäre m ein Element von M_m im Widerspruch zu der Eigenschaft der Elemente von M. Also ist m kein Element von M, woraus nach Definition von M folgt, dass m in M_m liegt. Dies ist ein Widerspruch. Also ist die Annahme, dass obige Aufzählung existiert falsch, das heißt $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar.