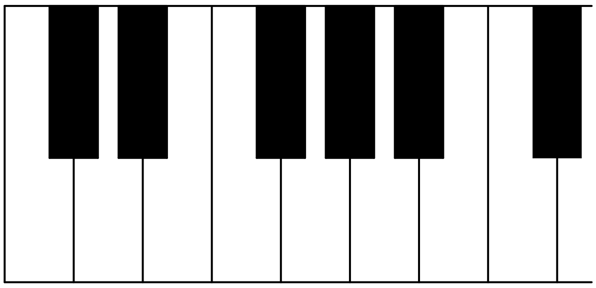
Schülerzirkel Mathematik
Fakultät für Mathematik. Universität Regensburg



Mathemusik

. . . oder wieviel Mathematik steckt in der Musik?

Zur Einleitung: Musik - eine mathematische Wissenschaft?

Schon die griechischen Sophisten vor Platon (428–348 v. Chr.) hatten die Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik zu einem gemeinsamen Lehrprogramm zusammengefasst. Auch im Mittelalter bildeten diese vier Gebiete innerhalb der *sieben freien Künste* das sogenannte „Quadrivium“ der *zahlgebundenen Wissenschaften* (neben dem „Trivium“ aus Grammatik, Dialektik und Rhetorik).

Wie kommt es, dass Musik als eine Wissenschaft gesehen wurde, die mit mathematischen Disziplinen in einen Topf geworfen wird? Wie hängen Musik und Zahlen zusammen?

In diesem Blatt wirst du Antworten auf diese Fragen erhalten. Dabei beschränken wir uns auf den historisch gewachsenen Aspekt, wie ein Tonsystem gestimmt werden kann. Du musst kein musikalisches Vorwissen mitbringen um den Ausführungen folgen zu können. Und wenn du musikalisch begabt bist, vielleicht sogar selbst ein Instrument spielst, werden dir vermutlich überraschende Zusammenhänge begegnen, über die du vielleicht noch nie nachgedacht hast.

Thema vom 18. März 2016. Einsenden der Lösungen bis 13. Mai 2016.
Schülerzirkel Mathematik, Fakultät für Mathematik, 93040 Regensburg
http://www.mathematik.uni-r.de/schuelerzirkel, schueler.zirkel@mathematik.uni-regensburg.de

1 Saiten, Töne und Intervalle

Spannt man eine Saite über einen Resonanzboden und zupft oder streicht daran, so beginnt diese zu schwingen, und wir hören einen Ton. Dieses Prinzip der Tonerzeugung liegt vielen Musikinstrumenten zu Grunde. Die Töne haben dabei mehrere Parameter: Tonhöhe, Lautstärke, Klang und noch viele mehr. Wir konzentrieren uns hier auf die *Tonhöhe*. Sie wird durch die *Frequenz* angegeben, d.h. durch die Zahl an Schwingungen der Saite pro Sekunde. Die Maßeinheit der Frequenz ist *Hertz* (Hz). Der sogenannte *Kammerton* a', der zum Stimmen eines Orchesters benutzt wird, hat beispielsweise in Europa eine Frequenz von 440 Hz, d.h. die Saite schwingt hier 440-mal in einer Sekunde. Der für den Menschen hörbare Bereich liegt ungefähr zwischen 15 Hz und 20000 Hz.

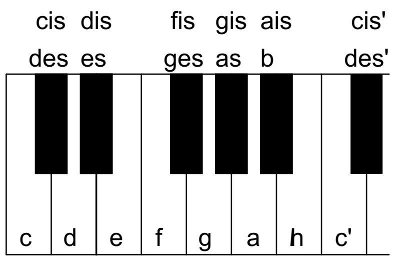
Zwischen der Länge der Saite, der Frequenz und der Tonhöhe gibt es einen Zusammenhang, der durch physikalische Gesetze bestimmt ist. Betrachten wir Saiten aus dem gleichen Material und der gleichen Dicke, so gilt: Je länger die Saite ist, desto kleiner ist die Frequenz und desto tiefer klingt der Ton. Mathematisch genauer betrachtet gilt sogar:

Satz 1. Wird durch das Schwingen einer in der Länge veränderlichen Saite ein Ton erzeugt, so gilt: Die Länge der Saite ist zur Frequenz des Tons indirekt proportional. Für zwei mit dieser Saite erzeugten Töne gilt also:

$$\frac{\text{Saitenlänge des 1. Tons}}{\text{Saitenlänge des 2. Tons}} = \frac{\text{Frequenz des 2. Tons}}{\text{Frequenz der 1. Tons}}$$

Das heute übliche Tonsystem ist folgendermaßen charakterisiert:

Definition 1. Wir betrachten ein Tonsystem mit zwölf Tönen, genauer mit zwölf aufeinanderfolgenden Tonstufen. Sie tragen allseits bekannte Namen, die sich nach jedem Durchlauf wiederholen. Der Abstand zwischen zwei Tönen mit der gleichen Bezeichnung heißt *Oktave*. Auf dem folgenden Ausschnitt einer Klaviertastatur siehst du die Namen im Überblick:



Der Apostroph bei c' bedeutet, dass der Ton c' eine Oktave höher klingt als der Ton c.

Allgemein bezeichnet man den Abstand zwischen zwei Tönen als *Intervall*. Das Intervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Tönen heißt *Halbton(schritt)*. Zwei Halbtöne bilden einen *Ganzton(schritt)*.

Beispielsweise sind c-cis, aber auch as-a Halbtonschritte, c-d oder fis-gis hingegen Ganztonschritte. Kommen wir nun zum Begriff der Tonleiter:

Definition 2. Die *C-Dur-Tonleiter* besteht aus den Tönen c, d, e, f, g, a, h und c'. Die Intervalle der C-Dur-Tonleiter bezogen auf den Grundton c werden folgendermaßen bezeichnet:

Intervall	Prime	Sekunde	große Terz	Quarte	Quinte	Sexte	Septime	Oktave
Beispiel	c-c	c-d	c-e	c-f	c-g	c-a	c-h	c-c'

Insbesondere beschreibt die Sekunde somit einen Ganztonschritt. Allgemein besteht eine Oktave in unserem Tonsystem aus fünf Ganzton- und zwei Halbtonschritten (oder auch zwölf Halbtonschritten), entsprechend eine Quinte aus drei Ganzton- und einem Halbtonschritt, sowie eine Quarte aus zwei Ganzton- und einem Halbtonschritt. So beschreibt zum Beispiel auch das Intervall d-a eine Quinte oder das Intervall f-b eine Quarte.

Schon der antike griechische Mathematiker Pythagoras (ca. 580–500 v. Chr.) untersuchte Intervalle genauer, indem er auf einem *Monochord* experimentierte. Auf diesem Instrument lässt sich die Länge einer Saite verändern und exakt messen. Du kannst ein Monochord selbst herstellen. Eine Bauanleitung findest du im Internet[1] oder auch im Schulbuch *Fokus Mathematik – Jahrgangsstufe 6* auf Seite 6.

Pythagoras versuchte bei seinen Experimenten herauszufinden, wann verschiedene Töne gut zusammen klingen. Dieses Verhalten bezeichnet man als *Konsonanz* (von lateinisch consonare = zusammenklingen). Ein besonderer Wohlklang ergibt sich, wenn die Saiten in einem möglichst einfachen Längenverhältnis stehen. Genauer gilt dabei aus physikalischen Gründen folgendes:

Sind zwei Saiten aus dem gleichen Material mit den Längen l_1 und l_2 gegeben, so gilt: Das Intervall klingt besonders konsonant, wenn das Längenverhältnis $l_1 : l_2$ (und damit nach Satz 1 auch das Frequenzverhältnis) durch einen Bruch mit möglichst kleinen natürlichen Zahlen im Zähler und Nenner angegeben werden kann.

In der folgenden Definition lernst du einfache Beispiele für konsonante Intervalle kennen:

Definition 3. Stehen die Frequenzen von zwei Tönen im Verhältnis $2 : 1$, so wird das Intervall als *reine Oktave* bezeichnet. Für das Frequenzverhältnis $3 : 2$ heißt das Intervall *reine Quinte*, beim Verhältnis $4 : 3$ sprechen wir von der *reinen Quarte*.

Wollen wir nun bei einem gegebenen Intervall die Frequenz des zweiten Tons ausgehend vom ersten Ton berechnen, so müssen wir nur die Ausgangsfrequenz mit dem Frequenzverhältnis des Intervalls multiplizieren.

Beispiel 1. Betrachten wir wieder den Kammerton a'=440 Hz. Die Oktave darüber, der Ton a", besitzt genau die doppelte Frequenz, denn $\frac{2}{1} \cdot 440\,\text{Hz} = 880\,\text{Hz}$. Analog berechnen wir die Frequenz der Quinte e" über dem a' als $\frac{3}{2} \cdot 440\,\text{Hz} = 660\,\text{Hz}$.

Nun kann man auch zwei Intervalle kombinieren. Gehen wir zum Beispiel erst eine Quinte und dann eine Quarte nach oben, so muss man für diesen zweifachen Sprung nur die Frequenzverhältnisse miteinander multiplizieren. In unserem Fall ergibt sich $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{1}$. Wir erhalten das Frequenzverhältnis einer Oktave. Auf der Klaviertastatur können wir dies nachprüfen. Von c eine Quinte aufwärts gelangen wir zum g. Und vom g eine Quarte aufwärts, landen wir beim c'. Insgesamt ergibt sich also ein Oktavsprung.

Ähnlich können wir zunächst eine Quinte aufwärts und dann eine Quarte abwärts gehen, um das Intervall der Sekunde zu erhalten. Um das Verhältnis der Sekunde zu erhalten müssen wir hier dividieren: $\frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8}$. Allgemein gilt:

[1] zum Beispiel unter `http://www.wdr.de/tv/wissenmachtah/bibliothek/monochord.php5`

Satz 2. Für einen Intervallsprung aufwärts muss die Ausgangsfrequenz mit dem Frequenzverhältnis des Intervalls multipliziert werden, für einen Sprung abwärts muss durch das Verhältnis dividiert werden.

Aufgabe 1 (*).

a) Gib sämtliche Quinten und Quarten an, die sich aus den zwölf bekannten Tönen bilden lassen.

b) Eine bestimmte Saite der Länge 1 Meter erzeugt den Ton c mit der Frequenz 128 Hz. Nun sollen mit Saiten aus demselben Material jeweils folgende Töne erklingen:

- genau eine reine Oktave oberhalb oder unterhalb vom Ton c
- genau eine reine Quinte oberhalb oder unterhalb vom Ton c
- genau eine reine Quarte oberhalb oder unterhalb vom Ton c

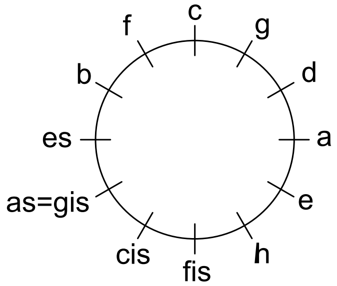
Gib jeweils die zugehörige Saitenlänge und Frequenz an.

Hinweis: Da in vielen Musikinstrumenten Saitenlängen aus praktischen Gründen beschränkt sind, benutzt man unterschiedliche Materialien und Dicken für die Saiten.

2 Die Pythagoreische Stimmung

Pythagoras wollte, ausgehend von den *reinen* Grundintervallen Oktave und Quinte, alle weiteren Töne stimmen um ein gut klingendes Tonsystem zu erhalten. Der Legende nach ging er dem Prinzip des *Quintenzirkels* vor:

Definition 4. Der Quintenzirkel zum Grundton c ist eine Abfolge von Tönen, die sich ergibt, wenn wir, bei c beginnend, der Reihe nach jeweils eine Quinte weiter gehen.



„Rutschen" wir dabei aus der Oktave zwischen c und c' heraus, so gehen wir wieder eine Oktave nach unten. Wir erhalten also folgende Reihenfolge:
c ↗ g ↗ d' ↘ d ↗ a ↗ e' ↘ e ↗ h ↗ fis' ↘ fis ↗ cis' ↘ cis ↗ gis=as ↗ es' ↘ es ↗ b ↗ f' ↘ f ↗ c' ↘ c

Insgesamt gehen wir in einem Quintenzirkel zwölf Quintensprünge nach oben und sieben Oktavsprünge nach unten. Mathematisch bedeutet dies für die Frequenzverhältnisse:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

Da wir am Ende des Quintenzirkels bei demselben Ton landen wollen, mit dem wir beginnen, sollte das Gesamtverhältnis der Frequenzen natürlich den Wert 1 ergeben. Tatsächlich erhalten wir aber einen anderen Wert, das sogenannte Pythagoreische Komma:

Definition 5. Sind im Quintenzirkel alle Intervallsprünge durch reine Quinten und reine Oktaven gegeben, so nennt man das Intervall zwischen dem Schlusston und dem Ausgangston *Pythagoreisches Komma*.

Um das Pythagoreische Komma zu korrigieren, stimmt man eine der zwölf Quinten (meist die Quinte zwischen gis=as und es) anders als im reinen Verhältnis. Diese „unreine“ Quinte heißt *Wolfsquinte*, denn sie „heult wie ein Wolf“.

Die Tonfrequenzen, die wir auf diese Weise unter Berücksichtigung der Wolfsquinte erhalten, definieren die Tonhöhen in der *Pythagoreischen Stimmung*. Für die Töne der C-Dur-Tonleiter ergeben sich in der Pythagoreischen Stimmung folgende Frequenzverhältnisse:

Ton	c	d	e	f	g	a	h	c’
Intervall	Prime	Sekunde	große Terz	Quarte	Quinte	Sexte	Septime	Oktave
Verhältnis	1 : 1	9 : 8	81 : 64	4 : 3	3 : 2	27:16	243:128	2 : 1

Aufgabe 2 (**).

a) Berechne das Pythagoreische Komma und gib den Fehler in Prozent an, der sich beim reinen Quintenzirkel ergibt.

b) Berechne das exakte Frequenzverhältnis der Wolfsquinte.

c) Berechne die Frequenzen aller 12 Töne zwischen c und c’ in der Pythagoreischen Stimmung, wenn man die Wolfsquinte zwischen gis=as und es legt und bei dem Anfangston c mit der Frequenz 128 Hz startet. Runde dabei auf ganze Hertz.

d) Zeige, dass alle Ganzton- bzw. Halbtonschritte in der pythagoreisch gestimmten C-Dur-Tonleiter jeweils das gleiche Verhältnis besitzen. Vergleiche dann ...

- ... zwei Halbtonschritte mit einem Ganzton.
- ... sechs Ganztonschritte mit einer Oktave.

Was fällt jeweils auf?

e) Zeige, dass alle Quinten (c-g, d-a, e-h, f-c’) und alle Quarten (c-f, d-g, e-a, g-c’) in der pythagoreisch gestimmten C-Dur-Tonleiter rein klingen.

Die Pythagoreische Stimmung war bis zum Mittelalter die allgemein gültige und verwendete Stimmung. Da jedoch nicht alle Quinten gleich gestimmt waren, konnte man Lieder nicht in beliebigen Tonarten spielen, weil sie dann unter Umständen nicht gut klangen.

3 Die reine Stimmung

In der reinen Stimmung der Renaissance und des Barock waren neben den Oktaven (2 : 1) und Quinten (3 : 2) auch die großen Terzen rein gestimmt. Aus der Pythagoreischen Terz (Verhältnis 81 : 64) wurde die *reine große Terz* mit dem Verhältnis 80 : 64 = 5 : 4. Der Klang der Terz war „reiner“, da man das Verhältnis der Frequenzen und damit auch der Saitenlängen durch kleinere Zahlen ausdrücken konnte. Die Terz wurde so zum Harmonieträger im Tonsystem, und es entstand im Laufe der Zeit eine wohlklingende mehrstimmige Musik. In der reinen Stimmung erhielten auch die Sexte c-a (reine Quarte + reine Terz) und Septime c-h (reine Quinte + reine Terz) leicht veränderte Verhältnisse gegenüber der Pythagoreischen Stimmung, während die Sekunde c-d mit einem Verhältnis von 9 : 8 gleich blieb.

Definition 6. Für die C-Dur-Tonleiter in der reinen Stimmung gelten folgende Verhältnisse:

Ton	c	d	e	f	g	a	h	c'
Intervall	Prime	Sekunde	große Terz	Quarte	Quinte	Sexte	Septime	Oktave
Verhältnis	1 : 1	9 : 8	5 : 4	4 : 3	3 : 2	5 : 3	15 : 8	2 : 1

Aufgabe 3 (*). Wir betrachten in dieser Aufgabe die C-Dur-Tonleiter in der reinen Stimmung.

a) Gib die prozentuale Abweichung der Sexte und Septime im Vergleich zur Pythagoreischen Stimmung an.

b) Untersuche die Frequenzverhältnisse aller auftretenden Ganzton- und Halbtonschritte. Welche Unterschiede zur Pythagoreischen Stimmung erkennst du hier?

c) Welche in der Tonleiter zwischen c und c" vorkommenden großen Terzen (bestehend aus zwei Ganztonschritten), Quinten und Quarten klingen tatsächlich rein?

d) Die kleine Terz besteht allgemein aus einem Ganzton- und einem Halbtonschritt. In der reinen Stimmung besitzt sie ein Frequenzverhältnis von 6 : 5. Gib alle in der Tonleiter vorkommenden kleinen Terzen an und untersuche, welche davon tatsächlich rein klingen.

Auch die reine Stimmung führt zu Problemen, wie man an einem einfachen Beispiel sieht: Der erste Ganztonschritt in der C-Dur-Tonleiter (c-d) mit einem Verhältnis von 9 : 8 unterscheidet sich vom ersten Ganztonschritt in der D-Dur-Tonleiter (d-e), welcher ein Verhältnis von 10 : 9 besitzt. Das einfache *Transponieren* eines Liedes, d.h. das Wechseln der Tonart ist damit nicht ohne Weiteres möglich, da der Wohlklang nicht erhalten bleibt.

4 Die gleichstufige Stimmung

Um den gesamten Tonvorrat von zwölf Tönen gleichermaßen nutzen zu können und Lieder in beliebigen Tonarten spielen zu können, müssen gleiche Intervalle jeweils auch gleich klingen. Dies geht nur, wenn man vom Ideal der reinen Intervalle abweicht.

Definition 7. In der *gleichstufigen Stimmung* ist die Oktave mit einem Verhältnis von 2 : 1 rein gestimmt. Die dazwischen liegenden Töne werden so gestimmt, dass jeder der zwölf Halbtonschritte das *gleiche* Verhältnis besitzt.

Die gleichstufige Stimmung gab es in Europa ab dem 19. Jahrhundert. Erstmals wurden hier Frequenzverhältnisse gebildet, die sich nicht als Bruch von natürlichen Zahlen ausdrücken lassen, die also keine rationale Zahl darstellen.

Aufgabe 4 (***).

a) Zeige, dass das Frequenzverhältnis eines Halbtonschritts in der gleichstufigen Stimmung einen Wert von 1,05946 besitzt, wenn man den Wert auf fünf Dezimalen rundet.

b) Zeige, dass das Frequenzverhältnis eines Halbtonschritts in der gleichstufigen Stimmung keine rationale Zahl ist.

Mit Hilfe der Aussagen von Aufgabe 4 lassen sich nun die folgenden Aufträge bearbeiten:

Aufgabe 5 (**).

a) Berechne die Frequenzverhältnisse aller Intervalle der C-Dur-Tonleiter in der gleichstufigen Stimmung auf jeweils drei Dezimalstellen. Gib die jeweiligen prozentualen Abweichungen zur reinen Stimmung nach oben bzw. unten an.

b) Berechne die Frequenzen in der C-Dur-Tonleiter, ausgehend von c=128 Hz, sowohl für die gleichstufige als auch für die reine Stimmung. Runde dabei auf ganze Hertz.

In heutiger Zeit bildet die gleichstufige Stimmung den Standard bei der Stimmung vieler Instrumente. Verloren gegangen ist damit allerdings die unterschiedliche Tonartencharakteristik, die man in anderen Stimmungen vorfindet. Alle Tonarten klingen in der gleichstufigen Stimmung gleich.

5 Die Obertonreihe

Werden Töne durch Instrumente oder die menschliche Stimme erzeugt, so klingt in der Regel nicht nur eine Frequenz, sondern wir hören ein Gemisch aus Teiltönen mit verschiedenen Frequenzen. Der tiefste Teilton dieses Gemisches heißt *Grundton*. Alle weiteren Teiltöne heißen *Obertöne*. Je nachdem, wie die Frequenzen der Teiltöne verteilt und gewichtet sind, ergibt sich für unser Ohr ein charakteristischer Klang, so dass wir zum Beispiel ein c auf dem Klavier von einem c auf der Geige unterscheiden können.

Definition 8. Die Obertonreihe eines Tons heißt *harmonisch*, wenn der n-te Teilton der Reihe zum Grundton in einem Frequenzverhältnis von $n:1$ steht. Dabei gilt $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Für $n = 1$ ergibt sich der Grundton, für $n > 1$ erhalten wir die Obertöne.

Aufgabe 6 (**). Betrachte die ersten 16 Teiltöne der harmonischen Obertonreihe zum Grundton c. Untersuche, welche dieser 16 Töne in der rein gestimmten C-Dur-Tonleiter vorkommen und gib den jeweils zugehörigen Ton an.

Die Obertonreihe ist auch ein Grund, warum einfache Frequenzverhältnisse zu einem konsonanten Klang führen:

Aufgabe 7 (**). Gegeben seien zwei Töne mit den Frequenzen f_1 und f_2. Unter welcher Bedingung an die beiden Frequenzen besitzen die Töne gemeinsame Teiltöne in ihren harmonischen Obertonreihen? Untersuche diesen Zusammenhang anschließend konkret für die Töne c und g in der reinen Stimmung, d.h. gib an, welche Teiltöne der Obertonreihen auch in der jeweils anderen Obertonreihe vorkommen.

6 Warum genau zwölf Töne in einer Oktave?

Unser heutiges Tonsystem besteht innerhalb einer Oktave aus zwölf unterschiedlichen Tönen. Warum ist das so? Wie oben gesehen, ist es aus Harmoniegründen sinnvoll zu verlangen, dass in einem Tonsystem die Intervalle der reinen Oktave und der reinen Quinte existieren. Stellen wir also folgende Bedingungen an ein Tonsystem auf:

1. Das Tonsystem besitzt endlich viele, nämlich $m \in \mathbb{N}$ Tonstufen pro Oktave.
2. Das Tonsystem ist oktav-periodisch, d.h. nach jeder Oktave wiederholen sich dieselben Tonstufen im Abstand einer Oktave.
3. Zu jedem Ton existiert die reine Oktave.
4. Zu jedem Ton existiert die reine Quinte.

Satz 3. Es gibt kein Tonsystem, das die Bedingungen 1 bis 4 erfüllt (vgl. Aufgabe 8).

Da wir in einem Tonsystem am ehesten auf die Forderung der reinen Quinten verzichten können, streichen wir die letzte Bedingung und ersetzen sie durch die beiden folgenden:

4a. Das Tonsystem ist gleichstufig gestimmt, d.h. aufeinanderfolgende Tonstufen (Halbtöne) besitzen immer dasselbe Frequenzverhältnis.

4b. Zu jedem Ton gibt es ein Intervall mit einem Frequenzverhältnis, das „möglichst nahe“ bei $3:2$ liegt (eine „fast reine“ Quinte).

Alle Stimmungen, die du in diesem Blatt kennengelernt hast, erfüllen die abgeänderten Bedingungen, wobei wir es jeweils mit zwölf Tonstufen zu tun haben. Die Zahl $m = 12$ scheint also eine gute Wahl für ein Tonsystem zu sein. Mithilfe von Kettenbrüchen (vgl. dazu die weiterführenden Links) kann man zeigen, dass auch für $m = 5$ eine geeignete Stimmung definiert werden kann[2]. Allerdings bieten die zugehörigen Tonleitern eine sehr beschränkte Tonauswahl.

Die nächstgrößere geeignete Anzahl von Tonstufen wäre $m = 41$. Bei 41 Halbtönen pro Oktave klingen allerdings benachbarte Tonstufen fast gleich, und auch die Spielbarkeit auf Instrumenten wäre bei 41 Tönen nicht mehr handhabbar, sodass diese Zahl aus praktischen Gründen nicht in Frage kommt. Der beste Kompromiss zwischen Handhabbarkeit und möglichst reinen Quinten ergibt sich somit für 12-stufige Systeme, wie wir sie heutzutage in Europa kennen.

Aufgabe 8 (***).

a) Beweise Satz 3.

b) Begründe mathematisch, warum die Zahlen $m = 5, m = 12$ und $m = 41$ gute Lösungen für die Konstruktion eines Tonsystems unter den abgeänderten Bedingungen sind, indem du die prozentualen Abweichungen der jeweiligen Quinte zur reinen Quinte berechnest.

Weiterführende Links

Hörbeispiele zu den einzelnen Stimmungen:
http://kilchb.de/ttmusik.html
„Was Musik mit Mathematik verbindet“:
http://info-team.biz/app/download/5785047446/Was+Musik+mit+Mathematik+verbindet.pdf
Viele Informationen über „Mathematik in der Welt der Töne“:
http://www.math.uni-magdeburg.de/reports/2002/musik.pdf, zu den Stimmungen v.a. Kapitel 6
Karlheinz Schüffler. „Pythagoras, der Quintenwolf und das Komma“, Vieweg+Teubner

[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Pentatonik