Lösungen zum Thema „Mathemusik“

Lösung zu Aufgabe 1.

a) Quinten: c-g, cis-gis bzw. des-as, d-a, dis-ais bzw. es-b, e-h, f-c, fis-cis bzw. ges-des, g-d, gis-dis bzw. as-es, a-e, b-f, h-fis
Quarten: c-f, cis-fis bzw. des-ges, d-g, dis-gis bzw. es-as, e-a, f-b, fis-h, g-c, gis-cis bzw. as-des, a-d, b-es bzw. ais-dis, h-e

b) Oktave oberhalb: $l = 0{,}5\text{m}$, $f = 256\text{Hz}$
Oktave unterhalb: $l = 2\text{m}$, $f = 64\text{Hz}$
Quinte oberhalb: $l = \frac{2}{3}\text{m}$, $f = 192\text{Hz}$
Quinte unterhalb: $l = \frac{3}{2}\text{m}$, $f = 85\frac{1}{3}\text{Hz}$
Quarte oberhalb: $l = \frac{3}{4}\text{m}$, $f = 170\frac{2}{3}\text{Hz}$
Quarte unterhalb: $l = \frac{4}{3}\text{m}$, $f = 96\text{Hz}$

Lösung zu Aufgabe 2.

a) Das Pythagoreische Komma hat den Wert $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531447}{524288} \approx 1{,}01364$

b) Für das Frequenzverhältnis w der Wolfsquinte gilt: $\left(\frac{3}{2}\right)^{11} \cdot w \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7} = 1$,
also ist $w = \frac{2^{18}}{3^{11}} = \frac{262144}{177147} \approx 1{,}47981$

c) Wir durchlaufen den Quintenzirkel unter Berücksichtigung der Wolfsquinte und berechnen jeweils die zugehörigen Frequenzen:
c=128Hz $\xrightarrow{\cdot\frac{3}{2}}$ g=192Hz $\xrightarrow{\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}$ d=144Hz $\xrightarrow{\cdot\frac{3}{2}}$ a=216Hz $\xrightarrow{\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}$ e=162Hz $\xrightarrow{\cdot\frac{3}{2}}$
h=243Hz $\xrightarrow{\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}$ fis/ges≈182Hz $\xrightarrow{\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}$ cis/des≈137Hz $\xrightarrow{\cdot\frac{3}{2}}$ gis/as≈205Hz $\xrightarrow{\cdot w\cdot\frac{1}{2}}$
dis/es≈152Hz $\xrightarrow{\cdot\frac{3}{2}}$ ais/b≈228Hz $\xrightarrow{\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}$ f=171Hz $\xrightarrow{\cdot\frac{3}{2}}$ c'=256Hz
Aufsteigend geordnet ergibt sich folgende Tabelle:

Ton	c	cis	d	dis	e	f	fis	g	gis	a	b	h	c'
f in Hz	128	137	144	152	162	171	182	192	205	216	228	243	256

d) Wir benutzen die Frequenzverhältnisse v_p der Tonleiter in der Pythagoreischen Stimmung. Dann gilt für die Ganztonschritte:

Intervall	c-d	d-e	f-g	g-a	a-h
v_p	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64} : \frac{9}{8} = \frac{9}{8}$	$\frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8}$	$\frac{27}{16} : \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$	$\frac{243}{128} : \frac{27}{16} = \frac{9}{8}$

Für die Halbtonschritte gilt:

Intervall	e-f	h-c'
v_p	$\frac{4}{3} : \frac{81}{64} = \frac{256}{243}$	$\frac{2}{1} : \frac{243}{128} = \frac{256}{243}$

Damit ergibt sich für zwei Halbtonschritte ein Verhältnis von $\frac{256}{243} \cdot \frac{256}{243} = \frac{65536}{59049} < \frac{9}{8}$, also ergeben zwei Halbtonschritte weniger als einen Ganztonschritt. Die relative Abweichung beträgt $\frac{9}{8} : \frac{65536}{59049} = \frac{531441}{524288}$, was genau dem Pythagoreischen Komma entspricht.
Ähnlich ergeben sechs Ganztonschritte ein Verhältnis von $\left(\frac{9}{8}\right)^6 = \frac{531441}{262144} > 2$ und damit mehr als eine Oktave. Die Abweichung beträgt auch hier $\frac{531441}{262144} : 2 = \frac{531441}{524288}$, also genau ein Pythagoreisches Komma.

e) Für die Frequenzverhältnisse gilt:

Quinten	c-g	d-a	e-h	f-c'
v_p	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16} : \frac{9}{8} = \frac{3}{2}$	$\frac{243}{128} : \frac{81}{64} = \frac{3}{2}$	$\frac{2}{1} : \frac{4}{3} = \frac{3}{2}$

Quarten	c-f	d-g	e-a	g-c'
v_p	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2} : \frac{9}{8} = \frac{4}{3}$	$\frac{27}{16} : \frac{81}{64} = \frac{4}{3}$	$\frac{2}{1} : \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$

Dies zeigt, das alle Quinten und Quarten der Tonleiter rein klingen.

Lösung zu Aufgabe 3.

a) Es bezeichne v_p das Verhältnis in der Pythagoreischen Stimmung und v_r das Verhältnis in der reinen Stimmung. Sei $\frac{\Delta v}{v_p} = \frac{v_r - v_p}{v_p}$ die gesuchte Abweichung. Dann gilt:
Sexte: $\frac{\Delta v}{v_p} = \frac{\frac{5}{3} - \frac{27}{16}}{\frac{27}{16}} = \frac{-1}{81} \approx -1{,}23\%$; Septime: $\frac{\Delta v}{v_p} = \frac{\frac{15}{8} - \frac{243}{128}}{\frac{243}{128}} = \frac{-1}{81} \approx -1{,}23\%$.
Damit sind die reinen Sexten und Septimen geringfügig tiefer als die Pythagoreischen Sexten gestimmt.

b) Für die Frequenzverhältnisse v_r der Ganztonschritte in der reinen Stimmung gilt:

Intervall	c-d	d-e	f-g	g-a	a-h
v_r	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4} : \frac{9}{8} = \frac{10}{9}$	$\frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8}$	$\frac{5}{3} : \frac{3}{2} = \frac{10}{9}$	$\frac{15}{8} : \frac{5}{3} = \frac{9}{8}$

Es fällt auf, dass hier (anders als in der Pythagoreischen Stimmung) neben Ganztonschritten mit dem Verhältnis 9 : 8 auch kleinere Ganztonschritte mit einem Verhältnis von 10 : 9 existieren. Letzterer kommt in der Tonleiter zweimal vor.
Für die Halbtonschritte gilt:

Intervall	e-f	h-c'
v_r	$\frac{4}{3} : \frac{5}{4} = \frac{16}{15}$	$\frac{2}{1} : \frac{15}{8} = \frac{16}{15}$

Beide Halbtonschritte sind damit vom gleichen Verhältnis 16 : 15, das etwas größer ist als als beim Halbtonschritt in der Pythagoreischen Stimmung[1].

c)

große Terzen	c-e	f-a	g-h
v_r	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3} : \frac{4}{3} = \frac{5}{4}$	$\frac{15}{8} : \frac{3}{2} = \frac{5}{4}$

Alle großen Terzen haben das reine Verhältnis von 5 : 4.

Quinten	c-g	d-a	e-h	f-c'
v_r	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3} : \frac{9}{8} = \frac{40}{27}$	$\frac{15}{8} : \frac{5}{4} = \frac{3}{2}$	$\frac{2}{1} : \frac{4}{3} = \frac{3}{2}$

Die Quinte d-a ist mit einem Verhältnis von 40 : 27 etwas größer als die reine Quinte. Alle anderen Quinten haben das reine Verhältnis von 3 : 2.

Quarten	c-f	d-g	e-a	g-c'
v_r	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2} : \frac{9}{8} = \frac{4}{3}$	$\frac{5}{3} : \frac{5}{4} = \frac{4}{3}$	$\frac{2}{1} : \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$

Alle Quarten haben das reine Verhältnis von 4 : 3.

[1] Damit werden die beiden etwas kleineren Ganztonschritte der reinen Tonleiter ausgeglichen.

d)

kleine Terzen	d-f	e-g	a-c’
v_r	$\frac{4}{3} : \frac{9}{8} = \frac{32}{27}$	$\frac{3}{2} : \frac{5}{4} = \frac{6}{5}$	$\frac{2}{1} : \frac{5}{3} = \frac{6}{5}$

Die kleine Terz d-f ist mit einem Verhältnis von 32 : 27 etwas kleiner als die reine kleine Terz. Alle anderen kleinen Terzen haben das reine Verhältnis von 6 : 5.

Lösung zu Aufgabe 4.

a) Sei x das Frequenzverhältnis eines Halbtonschritts in der gleichstufigen Stimmung. Da in der gleichstufigen Stimmung zwölf gleiche Halbtonschritte eine Oktave mit dem Frequenzverhältnis von 2 : 1 ergeben, gilt die Beziehung $x^{12} = 2$, und daher $x = \sqrt[12]{2} \approx 1{,}05946$

b) Wir führen einen Widerspruchsbeweis:
Angenommen, die Zahl $\sqrt[12]{2}$ wäre rational, dann könnte man sie als vollständig gekürzten Bruch darstellen, das heißt $\sqrt[12]{2} = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ und a und b sind teilerfremd. Dann gilt

$$2 = \frac{a^{12}}{b^{12}} \quad \text{und somit} \quad 2 \cdot b^{12} = a^{12}$$

Also ist 2 ein Teiler von a^{12} und damit auch von a, da 2 eine Primzahl ist. Also ist $a = 2 \cdot a'$ für eine natürliche Zahl $a' \in \mathbb{N}$, und es folgt weiter:

$$2 \cdot b^{12} = (2a')^{12} = 2^{12} \cdot a'^{12} \quad \text{bzw.} \quad b^{12} = 2^{11} \cdot a'^{12} = 2 \cdot 2^{10} \cdot a'^{12}$$

Also ist 2 ein Teiler von b^{12} und damit auch von b. Dies steht aber im Widerspruch zu unserer Annahme, denn wir haben eben gesehen, dass 2 sowohl ein Teiler von a als auch von b ist, und unsere Annahme war, dass a und b teilerfremd sind. Damit ist unsere Annahme falsch, und die Behauptung bewiesen.

Lösung zu Aufgabe 5.

a) Sei $x = \sqrt[12]{2} \approx 1{,}05946$ das Verhältnis des Halbtonschritts in der gleichstufigen Stimmung. Dann ergeben sich folgende Frequenzverhältnisse v_g in der gleichstufigen Stimmung. Sei $\frac{\Delta v}{v_r} = \frac{v_g - v_r}{v_r}$ die gesuchte prozentuale Abweichung, gerundet auf zwei Dezimalen. Wir erhalten folgende Ergebnisse:

Ton	c	d	e	f	g	a	h	c’
	Prime	Sekunde	große Terz	Quarte	Quinte	Sexte	Septime	Oktave
v_g	x^0	x^2	x^4	x^5	x^7	x^9	x^{11}	x^{12}
$v_g \approx$	1,000	1,122	1,260	1,335	1,498	1,682	1,888	2,000
v_r	1 : 1	9 : 8	5 : 4	4 : 3	3 : 2	5 : 3	15 : 8	2 : 1
$\frac{\Delta v}{v_r}$	0%	-0,22%	+0,79%	+0,11%	-0,11%	+0,91%	+0,68%	0%

b) Sei f_r bzw. f_g die jeweilige Frequenz in der reinen bzw. gleichstufigen Stimmung. Dann ergibt sich mit den Ergebnissen aus Teil a) und aus den Frequenzverhältnissen der reinen Stimmung folgende Tabelle:

Ton	c	d	e	f	g	a	h	c’
f_g in Hz	128	144	161	171	192	215	242	256
f_r in Hz	128	144	160	171	192	213	240	256

Lösung zu Aufgabe 6. Sei $n \in \{1, \ldots, 16\}$ und $v_n = n : 1$ jeweils das Frequenzverhältnis des n-ten Teiltons zum Grundton. Da ab dem dritten Teilton die Verhältnisse größer als 2 sind, liegen die Obertöne dann nicht mehr in der Grundoktave. In diesem Fall müssen wir den Grundton um eine oder mehrere Oktaven nach oben verschieben, bis das Frequenzverhältnis v'_n des Obertons zum erhöhten Grundton kleiner als 2 ist. Mit Hilfe von v'_n können wir dann das zugehörige Intervall untersuchen. Hier ein Beispiel: Für $n = 5$ ist $v_5 = 5 : 1 > 2$. Nach einem Oktavsprung des Grundtons nach oben erhalten wir ein Verhältnis von $5 : 2 > 2$. Erst nach einem weiteren Oktavsprung des Grundtons nach oben erhalten wir das Frequenzverhältnis $v'_n = 5 : 4 \leq 2$, eine reine große Terz. Der 5. Teilton ist also ein rein gestimmtes e.
Insgesamt erhalten wir folgende Tabelle:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
v_n	$1:1$	$2:1$	$3:1$	$4:1$	$5:1$	$6:1$	$7:1$	$8:1$
v'_n	$1:1$	$2:1$	$3:2$	$4:2$	$5:4$	$6:4$	$7:4$	$8:4$
reines Intervall	Prime	Oktave	Quinte	Oktave	große Terz	Quinte	–	Oktave
Ton	c	c’	g	c’	e	g	≈b	c’

n	9	10	11	12	13	14	15	16
v_n	$9:1$	$10:1$	$11:1$	$12:1$	$13:1$	$14:1$	$15:1$	$16:1$
v'_n	$9:8$	$10:8$	$11:8$	$12:8$	$13:8$	$14:8$	$15:8$	$16:8$
reines Intervall	Sekunde	große Terz	–	Quinte	–	–	Septime	Oktave
Ton	d	e	≈f	g	≈as	≈b	h	c’

Wir sehen also dass die n-ten Teiltöne für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16$ zur reinen Tonleiter gehören. In den anderen Fällen $n = 7, 11, 13, 14$ ergeben sich keine reinen Intervalle.

Lösung zu Aufgabe 7. Damit der n-te Teilton der Obertonreihe des Tons mit der Frequenz f_1 mit dem m-ten Teilton der Obertonreihe des Tons mit der Frequenz f_2 zusammenfällt, muss die Bedingung $n \cdot f_1 = m \cdot f_2$ mit $n, m \in \mathbb{N}$ gelten. Also folgt $f_1 : f_2 = m : n$, das bedeutet, dass das Frequenzverhältnis der beiden Töne rational sein muss.[2]
Im Beispiel der Töne c und g haben wir ein Frequenzverhältnis von $2 : 3$, das heißt wenn (n, m) die Werte $(3, 2), (6, 4), (9, 6), \ldots$, allgemein $(3a, 2a)$ für ein $a \in \mathbb{N}$ besitzt stimmen der n-te Teilton der Reihe von c mit dem m-ten Teilton der Reihe von g überein. Zum ersten Mal passiert dies beim 3. Teilton von c, der mit dem 2. Teilton von g übereinstimmt. Es handelt sich hierbei um die Oktave über dem Ton g.

Lösung zu Aufgabe 8.

a) Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, ein solches Tonsystem existiert. Die Strategie ist ähnlich wie beim Quintenzirkel. Wir wählen einen beliebigen Grundton t und springen von hier aus jeweils reine Quinten nach oben. Da es nur $m \in \mathbb{N}$, also *endlich* viele Tonstufen pro Oktave gibt und diese sich in jeder Oktave wiederholen, erhalten wir nach einer endlichen Anzahl $q \leq t$ von Quintensprüngen aufwärts einen Ton, der wieder die Bezeichnung des Grundtons besitzt. Er liegt also eine endliche Anzahl o von Oktaven über dem Grundton t. Dabei sind $q, o \neq 0$, da wir davon ausgehen können,

[2] Je kleiner die Zähler und Nenner das zugehörigen Bruchs sind, desto früher finden sich in den Obertonreihen der beiden Töne gemeinsame Töne. Dies erklärt nun auch, warum reine Intervalle besonders konsonant klingen!

dass das Tonsystem mehr als einen Ton besitzt. Da sowohl die Quinten als auch die Oktaven rein sind, erhalten wir also folgende Beziehung.:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^q = 2^o \quad \text{mit} \quad q, o \in \mathbb{N} \quad \text{und somit} \quad 3^q = 2^{o+q}$$

Dies stellt wegen $q, o \neq 0$ einen Widerspruch dar, da die Zahl auf der linken Seite als Dreierpotenz eine ungerade Zahl ist, während die Zahl auf der rechten Seite gerade ist.

b) Für $m \in \mathbb{N}$ sei x_m das Verhältnis aufeinanderfolgender Tonstufen eines m-stufigen Tonsystems, das den abgeänderten Bedingungen genügt. Dann ist $x_m^m = 2$, also $x_m = \sqrt[m]{2}$. Die m Tonstufen des Systems sind dann durch die folgenden Frequenzverhältnisse zu einem beliebigen Grundton gegeben: $x_m^1, x_m^2, \ldots, x_m^m$. Wir untersuchen nun für die genannten Werte von m, für welches $k \in \{1, \ldots, m\}$ das Frequenzverhältnis x_m^k der reinen Quinte am nächsten kommen und wie große jeweils der prozentuale Fehler $\frac{x_m^k - \frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}$ ist.

Für $m = 5$ erhalten wir $x_5 = \sqrt[5]{2}$. Die dritte Tonstufe über einem Grundton steht zu diesem in einem Frequenzverhältnis von $x_5^3 = \sqrt[5]{2}^3 \approx 1{,}516$, was mit einem Fehler von ca. $+1{,}05\%$ relativ nah an der reinen Quinte liegt.
Für $m = 12$ erhalten wir $x_{12} = \sqrt[12]{2}$. Die siebte Tonstufe über einem Grundton steht zu diesem in einem Frequenzverhältnis von $x_{12}^7 = \sqrt[12]{2}^7 \approx 1{,}498$, was mit einem Fehler von ca. $-0{,}11\%$ sehr nah an der reinen Quinte liegt.
Für $m = 41$ erhalten wir $x_{41} = \sqrt[41]{2}$. Die 24. Tonstufe über einem Grundton steht zu diesem in einem Frequenzverhältnis von $x_{41}^{24} = \sqrt[41]{2}^{24} \approx 1{,}5004$, was mit einem Fehler von ca. $0{,}03\%$ extrem nah an der reinen Quinte liegt.