Weihnachtsrätsel – Lösungen

Alle Aufgaben und Lösungen wurden entnommen oder adaptiert aus:
S. Schiemann, R. Wöstenfeld. *Die Mathe-Wichtel*, Band 2. Springer Spektrum, 2014.

Aufgabe 1 (Der Wichtel-Faktor* (nur für die Klassen 7/8) [4 Punkte]). Die folgenden fünf Weihnachtsbands werden von einer Jury aus sieben Wichteln bewertet. Die Jury verteilt Noten zwischen 0,0 und 10,0 in 0,5-er Schritten. Hier siehst du das Jury-Ergebnis:

Rot-Weiß	Tanzwichtel	Snowflakes	Santa's Band	Engelklänge
7,0	3,5	7,0	2,5	8,0
7,0	9,5	7,5	7,5	8,5
9,0	4,0	6,5	8,0	5,5
9,5	6,0	10,0	8,0	5,0
6,5	6,5	7,5	8,0	8,0
7,0	6,0	7,0	7,0	8,0
7,5	5,5	5,0	7,5	4,5

Nun gibt es vier Vorschläge für die Gesamtbewertung:

1. Die beiden höchsten und die beiden niedrigsten Wertungen einer Band werden gestrichen und die verbleibenden drei Punktzahlen werden addiert.
2. Die höchste durchschnittliche Bewertung zählt.
3. Nur die höchste Punktzahl zählt.
4. Es werden alle vergebenen Punktzahlen eines Teams der Größe nach geordnet und nur die Punktzahl an der mittleren Position (der sog. „Median") zählt.

Bestimme bei jedem der vier Vorschläge die Reihenfolge der Bands.

Lösung. Bei Vorschlag 1 erhalten wir folgende Übersicht:

	Rot-Weiß	Tanzwichtel	Snowflakes	Santa's Band	Engelklänge
Wertung 1	7,0	6,0	7,0	7,5	8,0
Wertung 2	7,0	6,0	7,5	8,0	5,5
Wertung 3	7,5	5,5	7,0	7,5	8,0
Summe	21,5	17,5	21,5	23,0	21,5
Platz	2	5	2	**1**	2

Vorschlag 2 führt zu folgendem Ergebnis:

	Rot-Weiß	Tanzwichtel	Snowflakes	Santa's Band	Engelklänge
Summe	53,5	41,0	50,5	48,5	47,5
Durchschnitt	7,6	5,9	7,2	6,9	6,8
Platz	**1**	5	2	3	4

Bei Vorschlag 3 ist es besonders einfach:

	Rot-Weiß	Tanzwichtel	Snowflakes	Santa's Band	Engelklänge
Wertung	9,5	9,5	10,0	8,0	8,5
Platz	2	2	**1**	5	4

Und bei Vorschlag 4 erhalten wir folgende Reihenfolge:

	Rot-Weiß	Tanzwichtel	Snowflakes	Santa's Band	Engelklänge
Wertung	7,0	6,0	7,0	7,5	8,0
Platz	3	5	3	2	**1**

Wir sehen, dass bei jedem Vorschlag eine andere Band gewinnt!

Aufgabe 2 (Wunschzetteltresor* (nur für die Klassen 7/8) [4 Punkte]). Der Tresor, in dem alle Wunschzettel gelagert werden, hat einen dreistelligen Code ABC. Über den Code weißt du folgendes: ABC ist eine Primzahl. Die beiden zweistelligen Zahlen AB und BC in dieser Zahl sind auch Primzahlen. Und die drei einstelligen Zahlen A, B und C sind ebenfalls Primzahlen. Bestimme die Anzahl an Kombinationen, die du probieren musst, um den Tresor zu knacken, wenn du dabei alle angegebenen Informationen berücksichtigst.

Hinweis. Wie du sicher weißt, zählt die Zahl 1 nicht zu den Primzahlen.

Lösung. Die einzigen einstelligen Primzahlen sind die Zahlen 2, 3, 5 und 7. Diese kommen für die Ziffern A, B und C in Frage.

Alle zweistelligen Primzahlen, die sich aus diesen vier Ziffern bilden lassen sind die folgenden Zahlen: 23, 37, 53 und 73. Diese kommen für AB und BC in Frage.

Da aber B gleichzeitig Einerziffer von AB und Zehnerziffer von BC ist, bleiben für ABC die Kombinationen 237, 373, 537 und 737. Nun sind aber 237 und 537 durch 3 teilbar, also keine Primzahlen. Außerdem ist $737 = 11 \cdot 67$ keine Primzahl. Es bleibt also nur noch die Zahl 373 als Code übrig, und diese Zahl ist tatsächlich eine Primzahl. Du schaffst es also beim ersten Versuch den Tresor zu knacken.

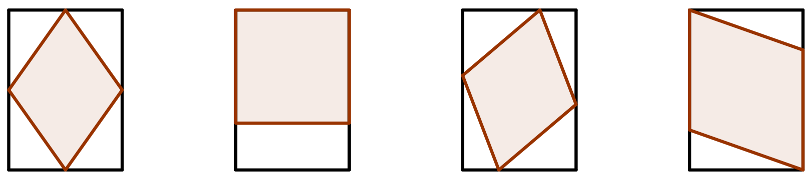
Aufgabe 3 (Wichtelbook-Party* [4 Punkte]). Auch Weihnachtswichtel nutzen gerne ein soziales Netzwerk, das „Wichtelbook", in dem sie miteinander Freundschaften abschließen können. Die einzige Regel dabei ist, dass niemand mehr als 40 Freunde haben kann. Zum Weihnachtsabend lädt Frodo Freunde aus dem Wichtelbook ein: „Ich lade dort einfach alle meine 21 Freunde ein. Damit der Abend lustiger wird, sollen zusätzlich auch alle Freunde meiner Freunde eine Einladung erhalten." Leider weiß Frodo nicht genau, wie viele und welche Freunde jeder seiner Freunde hat. Er weiß nur, dass jeder seiner Freunde mehr Freunde hat als er selbst. Frodo überlegt nun, wie viele Wichtel am Weihnachtsabend mindestens und höchstens kommen werden, wenn alle eingeladenen Wichtel tatsächlich erscheinen. Kannst du ihm dabei helfen?

Lösung. Nach den angegebenen Informationen hat jeder der 21 Freunde von Frodo mindestens 22 und höchstens 40 Freunde.

Am wenigsten Wichtel werden eingeladen, wenn jeder Freund Frodos nur 22 Freunde hat und alle Freunde Frodos auch untereinander befreundet sind. Dann hat jeder Freund Frodos nämlich 20 Freunde, die auch Frodos Freunde sind und bereits von ihm eingeladen wurden. Da Frodo selbst ebenfalls ein Freund von jedem seiner Freunde ist, fehlt nur noch je ein weiterer Wichtel, mit dem jeder von Frodos Freunden befreundet ist. Ist dieser Wichtel nun für alle Freunde von Frodo derselbe, so ist also neben den 21 Freunden von Frodo nur noch ein weiterer Wichtel am Weihnachtsabend eingeladen. Es kommen also mindestens 22 Wichtel.

Um die maximal mögliche Gästezahl zu bestimmen, müsste jeder von Frodos Freunden die Maximalzahl von 40 Freunden haben, die sich so wenig wie möglich überschneiden dürfen. Frodo selbst ist ja mit jedem seiner Freunde befreundet. Alle anderen 39 Freunde von Frodos Freunden könnten aber für jeden von Frodos Freunden jeweils andere Wichtel sein. In diesem Fall haben Frodos Freunde $21 \cdot 39 = 819$ unterschiedliche Wichtel als Freunde. Dazu kommen die 21 Freunde von Frodo selbst, also gibt es insgesamt höchstens $819 + 21 = 840$ Gäste.

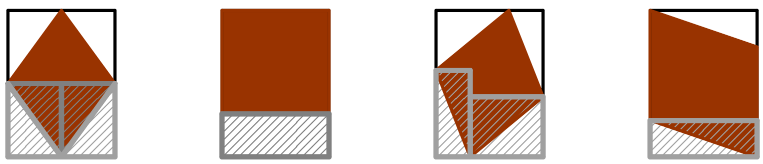
Aufgabe 4 (Der Weihnachtsmann holt die R(a)ute raus** [4 Punkte]). Der Weihnachtsmann schneidet aus einem DIN-A4-Blatt vier verschiedene Rauten aus und grübelt, welche den größten Flächeninhalt hat. Du kannst die vier Möglichkeiten in der folgenden Abbildung sehen.



Begründe, welche der vier Rauten den größten Flächeninhalt hat.

Lösung. Wir bezeichnen die Seitenlängen des DIN-A4-Blattes mit a und b. Auf Millimeter gerundet, gilt dann $a = 210\ mm$ und $b = 297\ mm$, was für die weitere Berechnung allerdings gar nicht so wichtig ist.

Schneidet man die Rauten in den vier Fällen tatsächlich aus, so kann man sich ansehen, was übrig bleibt, und die Reststücke neu zusammensetzen.



Im ersten Fall ist es einfach, es bleibt genau die Hälfte des Blattes übrig. Die Raute selbst hat also den Flächeninhalt $A_1 = \frac{a \cdot b}{2} \approx 31185\ mm^2$.

Im zweiten Fall bleibt sicher weniger als die Hälfte übrig. Die Raute hat hier den Flächeninhalt $A_2 = a^2 \approx 44100\ mm^2$.

Im dritten Fall bleiben vier Dreiecke übrig, die man zu zwei Rechtecken zusammenlegen kann. Man erkennt leicht, dass die Restfläche größer als im zweiten Fall ist, so dass der Flächeninhalt A_3 im gezeichneten Fall kleiner als A_2 ist. Für alle Interessierten gibt es eine allgemeine Betrachtung dieses Falls im Anhang.

Im vierten Fall bleiben zwei rechtwinklige Dreiecke übrig, die man zu einem Rechteck zusammenschieben kann. Man kann bereits vermuten, dass die Restfläche hier kleiner ist als im zweiten Fall, so dass der Flächeninhalt A_4 der Raute in diesem Fall am größten ist. Dies lässt sich auch rechnerisch beweisen: Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt $a \cdot (b - s)$, wobei s die Seitenlänge der Raute ist. Damit folgt für den Flächeninhalt der Raute $A_4 = ab - a \cdot (b - s) = as$. Nun ist aber s die Hypotenuse in den rechtwinkligen Dreiecken, und a eine der Katheten. Da die Hypotenuse länger als jede Kathete ist, folgt $s > a$, also $A_4 = a \cdot s > a \cdot a = a^2 = A_2$.

Die vierte Raute hat also den größten Flächeninhalt. Den genauen Wert kannst du ebenfalls dem Anhang entnehmen.

Aufgabe 5 (Das gestreifte Schaf** [4 Punkte]). Im Weihnachtsdorf gibt es eine große Schafherde. Eines der Schafe ist seltsamerweise gestreift. Schäfer Benno kümmert sich liebevoll um alle Schafe. Eines Tages macht er eine interessante Entdeckung: Wenn er die Schafe in Paare aufteilt, bleibt das gestreifte Schaf übrig. Wenn er sie in Dreiergruppen aufteilt, bleibt auch das gestreifte Schaf übrig. Auch wenn er sie in Gruppen zu je vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun und zehn Schafen aufteilt, bleibt immer das eine gestreifte Schaf alleine übrig. Berechne die kleinste Anzahl an Schafen, die Bennos Herde unter diesen Bedingungen haben kann.

Hinweis. Die Herde besteht natürlich aus mehr als einem Schaf.

Lösung. Sei n die gesuchte Anzahl. Aufgrund der Tatsache, dass immer ein Schaf übrig bleibt, wenn wir Gruppen zu je zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun oder zehn Schafen bilden, wissen wir, dass bei der (ganzzahligen) Division von n durch die Zahlen $2, 3, 4, \ldots, 10$ jedesmal der Rest 1 übrig bleibt. Folglich ist die Zahl $n-1$ durch alle natürlichen Zahlen von 2 bis 10 ohne Rest teilbar. Die kleinste dieser Zahlen ist das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Zahlen $2, 3, \ldots, 10$. Dieses kann man mit Hilfe der Primfaktoren der Zahlen ermitteln. Es gilt:

$$n - 1 = \mathrm{kgV}(2, 3, \ldots, 10) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$$

und somit $n = 2521$. Die Herde besteht also aus mindestens 2521 Schafen.

Aufgabe 6 (Weihnachtsbaum 2.0** [4 Punkte]). Der Weihnachtsmann hat in diesem Jahr einen besonderen Weihnachtsbaum. Die Kugeln hängen nicht am Baum, sondern schweben frei um den Baum herum. Es gibt 25 Kugeln: 16 rote, fünf weiße und vier gelbe. Aber das ist noch nicht alles: Treffen sich zufälligerweise zwei Kugeln mit unterschiedlichen Farben, so ändern sie ihre Farbe und nehmen die jeweils dritte Farbe an. Bei gleichfarbigen Zusammenstößen oder bei mehr als zwei beteiligten Kugeln passiert nichts. Die Schwebe- und Lichtershow beginnt. Nach einiger Zeit fragt sich der Weihnachtsmann schockiert: „Kann es eigentlich passieren, dass irgendwann alle Kugeln dieselbe Farbe haben und damit keine Farbwechsel mehr stattfinden?!“ Finde heraus, ob das möglich ist, und wenn ja, welche Farbe alle Kugeln dann haben.

Lösung. Man kann bei dieser Aufgabe zuerst einmal etwas herumprobieren und überlegen, wie sich die drei Anzahlen r, w, g der roten, weißen und gelben Kugeln bei einem Farbwechsel verändern. Zu Beginn gilt $(r, w, g) = (16, 5, 4)$. Stoßen nun zum Beispiel eine rote und eine weiße Kugel zusammen, so erhalten wir die Verteilung $(15, 4, 6)$.

Was verändert sich nun bei einem Farbwechsel, und was bleibt gleich? Wir stellen fest, dass bei jedem Farbwechsel zwei der drei Zahlen um 1 kleiner werden (diese gehören zu den beiden Farben, die zusammenstoßen), während sich die dritte Zahl um 2 erhöht. Nun kommt die entscheidende Idee: Der Abstand zwischen je zwei der drei Zahlen bleibt bei einem Farbwechsel gleich, oder er wird um 3 größer oder kleiner.

In der Anfangsverteilung haben die Abstände die Werte $r - w = 11$, $r - g = 12$ und $w - g = 1$. Wenn alle Kugeln die gleiche Farbe besitzen, haben wir eine der Verteilungen $(25, 0, 0), (0, 25, 0)$ oder $0, 0, 25)$. In allen drei Fällen gibt es jeweils einen Abstand mit dem Wert 0. Da sich Abstände immer nur um 3 ändern können, kann nur der Anfangsabstand $r - g = 12$ irgendwann auf 0 schrumpfen. Die anderen beiden Anfangsabstände 11 und 1 sind nämlich keine Vielfachen von 3. Es kommt also nur die Verteilung $(0, 25, 0)$ mit lauter weißen Kugeln in Frage.

Die Frage ist nun, ob wir den Abstand zwischen den roten und gelben Kugeln auf 0 bringen können, und das ist tatsächlich möglich, zum Beispiel so:

r	w	g
16	5	4
15	4	6
14	3	8
13	2	10
12	1	12

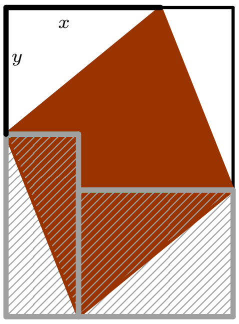
Nun gilt $r - g = 0$, wir haben also gleich viele rote und gelbe Kugeln. Wenn diese beiden Farben nun gegenseitig weiter zusammenstoßen, so werden ihre Anzahlen bei jedem Farbwechsel um 1 kleiner, und wir erhalten schließlich lauter weiße Kugeln:

r	w	g
12	1	12
11	3	11
10	5	10
9	7	9
8	9	8
7	11	7
6	13	6
5	15	5
4	17	4
3	19	3
2	21	2
1	23	1
0	25	0

Die wesentliche Idee dieser Lösung war also, eine geeignete *Invariante* zu finden. Mehr zu Invarianten findest du im Themenblatt 1 aus dem Schuljahr 2012/13.

Anhang: Der dritte Fall in Aufgabe 4

Sei x der Abstand der oberen Ecke der Raute von der linken oberen Ecke des Blattes (in der Abbildung ist $x \approx \frac{2}{3}a$) und y der Abstand der linken Ecke der Raute von der oberen linken Ecke des Blattes.



Allgemein gilt: $0 \leq x \leq a$ und $0 \leq y \leq b$. Die Restfläche hat dann den Flächeninhalt $xy + (a-x)(b-y) = 2xy + ab - ay - bx$, also folgt für den Flächeninhalt der Raute

$$A_3 = ab - (2xy + ab - ay - bx) = ay + bx - 2xy.$$

Da alle vier Seiten der Raute gleich lang sind, gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2},$$

und damit

$$x^2 + y^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - 2by + y^2$$

bzw.

$$y = \frac{a^2 + b^2 - 2ax}{2b}.$$

Oben eingesetzt erhält man für die Raute als Flächeninhalt in Abhängigkeit von x:

$$A_3(x) = a \cdot \frac{a^2 + b^2 - 2ax}{2b} + bx - 2x \cdot \frac{a^2 + b^2 - 2ax}{2b} = \frac{2a}{b} \cdot x^2 - \frac{2a^2}{b} \cdot x + \frac{a^3 + ab^2}{2b}$$

Die zugehörige quadratische Funktion hat als Graph eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitel $S(\frac{a}{2}|\frac{ab}{2})$, d.h. für $x = \frac{a}{2}$ (der obere Punkt der Raute liegt in der Mitte) wird der kleinste Flächeninhalt $A_3(\frac{a}{2}) = \frac{ab}{2} \approx 31185\ mm^2 = A_1$ angenommen (das ist die Situation des ersten Falls). Der größte Flächeninhalt ergibt sich hier, wenn x am Rand des zulässigen Bereichs liegt, also $x = 0$ oder $x = a$. Zeichnerisch ist das die Situation des vierten Falls. Hier ergibt sich

$$A_3(0) = A_3(a) = \frac{a^3 + ab^2}{2b} = A_4$$

Man kann das im vierten Fall auch direkt nachrechnen. Es ist $A_4 = a \cdot s$ und (nach dem Satz des Pythagoras) gilt $s^2 = a^2 + (b-s)^2$, also $s = \frac{a^2+b^2}{2b}$ und somit $A_4 = \frac{a^3+ab^2}{2b}$.