

Hexenküche

Fräulein Tunk ist eine äußerst kreative, aber leider nicht besonders systematische Hexe. Insbesondere weiß sie nicht, wie viele Zaubersprüche, Rezepte etc. es gibt. Wir werden ihr mit etwas Kombinatorik weiterhelfen.

Beispiel (Wetterzauber). Fräulein Tunk hat vergessen, wie viele Wetterzauber es gibt. Sie kann sich aber noch an folgendes erinnern: Jeder Wetterzauber enthält mindestens eine der Zeilen


Leise rieselt der Schnee. (Kurz: L)

Wer reitet so spät durch Nacht und Wind? (Kurz: W)


Es gibt 88 Wetterzauber mit L und 66 mit W. Außerdem gibt es 24, die sowohl L als auch W enthalten. Wie viele Wetterzauber gibt es?

Lösung. Sei L die Menge der Wetterzauber, die L enthalten und sei W die Menge der Wetterzauber, die W enthalten. Dann ist $L \cup W$ (die Vereinigungsmenge von L und W) die Menge aller Wetterzauber. Wie viele Elemente hat $L \cup W$? Wenn wir die Anzahlen von L und W addieren, so zählen wir diejenigen Wetterzauber doppelt, die sowohl in L als auch in W liegen (d.h. alle Wetterzauber, die sowohl L als auch W enthalten). Also ist (wobei wir mit $|X|$ die Anzahl der Elemente einer Menge X bezeichnen)

$$|L \cup W| = |L| + |W| - |L \cap W| = 88 + 66 - 24 = 130.$$

Es gibt somit 130 Wetterzauber. 


Beispiel (Hexensuppe). Gewöhnliche Hexensuppe besteht aus Grünwein und Fusselfusel. Eine Flasche Grünwein enthält einen Liter Grünwein und eine Flasche Fusselfusel fasst genau fünf Liter. Der Kessel von Fräulein Tunk hat ein Volumen von 55 Litern. Sie weiß noch, dass der Kessel bei der Zubereitung der gewöhnlichen Hexensuppe randvoll gefüllt war mit Grünwein und Fusselfusel und dass in den Flaschen keine Reste geblieben sind. Wie viele solcher Mengenkombinationen von Grünwein und Fusselfusel gibt es?

Lösung. Wegen $55/5 = 11$ muss sie 0, 1, ... oder 11 Flaschen Fusselfusel verwendet haben. Für jede dieser Möglichkeiten gibt es genau eine Weise, den Kessel mit Grünwein aufzufüllen. Also gibt es genau zwölf passende Mengenkombinationen von Grünwein und Fusselfusel. 

Beispiel (Drachenrufe). Lockrufe für den Drachen von Fräulein Tunk bestehen aus den Lauten R und O. Damit sie wunderbar gurgelig klingen, dürfen sie die Lautfolge OO *nicht* enthalten. Wie viele Drachenrufe der Länge 19 gibt es?

Lösung. Ist n eine natürliche Zahl, so bezeichnen wir mit $D(n)$ die Anzahl der Drachenrufe der Länge n . Offenbar ist $D(1) = 2$ (die Rufe sind R und O) und $D(2) = 3$ (nämlich RR, RO, OR). Ist $n \geq 3$, so gilt

$$\begin{aligned} D(n) &= D(n-1) && \text{(R und dann ein Ruf der Länge } n-1) \\ &+ D(n-2) && \text{(OR und dann ein Ruf der Länge } n-2) \end{aligned}$$

Man kann nun Schritt für Schritt die Werte $D(3), D(4), \dots$ berechnen (z.B. mit einem kleinen Computerprogramm oder so wie in Aufgabe 4 von Thema 4 (2012/13)). Es gilt $D(19) = D(18) + D(17) = \dots = 10946$. 

Hinweis. Bei jeder der folgenden Aufgaben sind die Antworten zu begründen (es genügt also *nicht*, einfach nur Zahlen anzugeben)!

Thema vom 22. März 2019. Einsenden der Lösungen bis 17. Mai 2019.

Schülerzirkel Mathematik, Fakultät für Mathematik, 93040 Regensburg

<http://www.mathematik.uni-r.de/schuelerzirkel>, schueler.zirkel@mathematik.uni-regensburg.de

Allgemeine Informationen zur Teilnahme: <http://www.mathematik.uni-r.de/schuelerzirkel>

Allgemeine Hinweise zum Lösen von Aufgaben: <http://www.mathematik.uni-r.de/schuelerzirkel>

- ☐ **Aufgabe 1 (Tränke und Süppchen*** (nur für die Klassen 7/8) [4 Punkte]). Tränke und Süppchen bestehen aus den folgenden Zutaten:

Tauwasser, Zitterkraut, Jaguarpfote, Schlangenzahn, Regenbogensubstanz, Eiblau

Tränke enthalten Tauwasser und Regenbogensubstanz (und evtl. weitere Zutaten). Süppchen müssen Zitterkraut enthalten und mindestens Jaguarpfote oder Schlangenzahn, aber auf gar keinen Fall Eiblau.

1. Wie viele Zutatenkombinationen für Tränke gibt es?
2. Wie viele Zutatenkombinationen für Süppchen gibt es?

- ☐ **Aufgabe 2 (Tinkturen*** (nur für die Klassen 7/8) [4 Punkte]). Die Zubereitung von Tinkturen beruht auf den folgenden Arbeitsschritten:

rühren, schütteln, brodeln, dünsten

In Tinkturrezepten sind diese Arbeitsschritte aufgelistet. Selbstverständlich ist es wichtig, in welcher Reihenfolge und wie oft solche Arbeitsschritte durchgeführt werden. Zum Beispiel sind „rühren, brodeln, brodeln“, „rühren, brodeln“ und „brodeln, rühren, brodeln“ drei verschiedene Rezepte.

1. Wie viele Tinkturrezepte der Länge 2019 gibt es?
2. Wie viele Tinkturrezepte der Länge 2019 gibt es, bei denen höchstens einmal gerührt wird?

- ☐ **Aufgabe 3 (Blubberella*** [4 Punkte]). Jedes Rezept im Bestseller „Blubberella Zauberbrühen“ enthält mindestens eine der Zutaten Krötenblut, Einhornstaub, Schuhkarton. Es gibt 42 Zauberbrühen, die Krötenblut enthalten, 24 mit Einhornstaub, 21 mit Schuhkarton, 11 mit Krötenblut und Einhornstaub, 8 mit Krötenblut und Schuhkarton, 7 mit Einhornstaub und Schuhkarton, und zwei, die alle drei dieser Zutaten enthalten. Wie viele Rezepte enthält das Buch?

- ☐ **Aufgabe 4 (Schlundschnorchler**** [4 Punkte]). Der berühmte Schlundschnorchler (ein Zaubertrank mit abscheulicher Wirkung) wird aus den folgenden Zutaten hergestellt:

Schneeflocke, Wolkenschleim, Abraka

Eine Schneeflocke kostet einen Hexengulden, eine Portion Wolkenschleim kostet zwei Hexengulden und eine Phiole Abraka kostet vier Hexengulden. Fräulein Tunk kann sich leider nur noch daran erinnern, dass die Zutaten für den Schlundschnorchler insgesamt genau 88 Hexengulden gekostet haben. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Mengenverteilungen?

- ☐ **Aufgabe 5 (Dunkelsprüche**** (empfohlen ab Klasse 9) [4 Punkte]). Die Finsterbörger-Dunkelsprüche bestehen nur aus den Symbolen X, Y, Z. Damit die Sprüche aussprechbar bleiben, dürfen sie die Folge ZX *nicht* enthalten. Zu einer natürlichen Zahl n sei $F(n)$ die Anzahl der Finsterbörger-Dunkelsprüche der Länge n .

1. Wie kann man $F(n)$ durch $F(1), \dots, F(n-1)$ ausdrücken?
2. Wie viele Finsterbörger-Dunkelsprüche der Länge 12 gibt es?

Hinweis. Du kannst dafür ein kleines Computerprogramm schreiben.

- ☐ **Aufgabe 6 (Elixire***** (empfohlen ab Klasse 9) [4 Punkte]). Es gibt genau 2019 zugelassene Zutaten für Elixire. Bei einer Hexenversammlung brauen 1001 Hexen gleichzeitig nebeneinander Elixire – jede in ihrem Kessel. Die Regeln der Hexenversammlung verbieten es, dass eine der Zutaten von allen Hexen verwendet wird (es dürfen aber Zutaten von bis zu 1000 Hexen verwendet werden, es dürfen Zutaten gar nicht verwendet werden, jede Hexe darf mehrere Zutaten verwenden, und es dürfen auch Kessel leerbleiben). Wie viele Möglichkeiten gibt es insgesamt für die Zutatenkombinationen in den 1001 aufgereihten Kesseln?