

## Dracostan

Die Drachen von Dracostan sind ganz wild darauf, alles und jeden zu vergleichen. Insbesondere wollen sie sehr genau wissen, wer unschlagbar oder gar der Stärkste ist! Verkompliziert wird die Lage dadurch, dass sich nicht alle Drachen einig darüber sind, *wie* man die Stärke vergleicht oder misst. Immerhin konnte sich der Hohe Drachenrat auf die folgenden Grundsätze einigen:

**Grundsätze zum Stärkenvergleich von Drachen.** Ein Stärkenvergleich „ $\leq$ “ zwischen Drachen kann nur dann perfekt offiziell (kurz: PO) sein, wenn die untenstehenden drei Bedingungen erfüllt sind.

- ① Jeder Drache ist höchstens so stark wie er selbst, d.h. für alle Drachen  $x$  ist  $x \leq x$ .
- ② Der Stärkenvergleich vergleicht nicht widersprüchlich: Es gibt keine zwei verschiedenen Drachen  $x$  und  $y$ , die gleichzeitig  $x \leq y$  und  $y \leq x$  erfüllen.
- ③ Für alle Drachen  $x, y, z$  gilt: Ist  $z$  mindestens so stark wie  $y$  und  $y$  mindestens so stark wie  $x$ , so ist  $z$  auch mindestens so stark wie  $x$ . D.h.: Gilt  $x \leq y$  und  $y \leq z$ , so ist auch  $x \leq z$ .

Ist  $\leq$  ein PO-Stärkenvergleich, so ist ein Drache  $x$  der **Stärkste**, wenn für alle Drachen  $y$  gilt:  $y \leq x$ . Ein Drache  $x$  ist ein **Unschlagbarer**, wenn für alle Drachen  $y$  gilt: Ist  $x \leq y$ , so ist  $y$  bereits der Drache  $x$ .

**Beispiel (König).** Der erste zertifizierte PO-Stärkenvergleich „ $\leq_K$ “ ging von König Draco aus:

Für alle Drachen  $x$  und  $y$  gilt genau dann  $x \leq_K y$ , wenn  $y$  Draco ist oder wenn  $x$  und  $y$  bereits derselbe Drache sind.

Bei diesem Stärkenvergleich lässt sich leicht überprüfen, dass die Bedingungen ①, ②, ③ alle erfüllt sind (probiere das aus!). König Draco ist der Stärkste bzgl.  $\leq_K$ . Der Stärkenvergleich lässt sich wie folgt veranschaulichen:



**Beispiel (Hörner).** Viele Drachen möchten sich über die Anzahl der Hörner vergleichen. Der Vergleich „ $\leq_H$ “ mit

Für Drachen  $x$  und  $y$  gilt genau dann  $x \leq_H y$ , wenn  $x$  höchstens so viele Hörner hat wie  $y$ .

erfüllt jedoch die Bedingung ② *nicht* (denn es gibt mehrere, verschiedene, Drachen in Dracostan, die dieselbe Anzahl an Hörnern haben!).

**Beispiel (Seriennummer).** Jeder Drache  $x$  in Dracostan hat eine Seriennummer  $S(x)$  (irgendeine Zahl) und keine zwei Drachen haben dieselbe Seriennummer. Bürokraten in Dracostan lieben den folgenden PO-Stärkenvergleich „ $\leq_S$ “:

Für Drachen  $x$  und  $y$  gilt genau dann  $x \leq_S y$ , wenn die Seriennummer  $S(x)$  von  $x$  kleiner gleich  $S(y)$  ist.

Es lässt sich leicht überprüfen, dass  $\leq_S$  tatsächlich ①, ②, ③ erfüllt.

- ☐ **Aufgabe 1 (König und Dame\*** (nur für die Klassen 7/8) [4 Punkte]). Als Draco seine Herzensdame Draca kennenlernte, beschloss er, den Stärkenvergleich „ $\leq_{KD}$ “ einzuführen:

Für Drachen  $x$  und  $y$  gilt genau dann  $x \leq_{KD} y$ , wenn  $x$  und  $y$  dasselbe Geschlecht (m/w) haben und folgendes erfüllt ist:

- Sind  $x$  und  $y$  männlich, so gilt genau dann  $x \leq_{KD} y$ , wenn  $y$  Draco ist oder wenn  $x$  und  $y$  bereits derselbe Drache sind.
- Sind  $x$  und  $y$  weiblich, so gilt genau dann  $x \leq_{KD} y$ , wenn  $y$  Draca ist oder wenn  $x$  und  $y$  bereits derselbe Drache sind.

1. Skizziere  $\leq_{KD}$  analog zur Skizze von  $\leq_K$ .
2. Gibt es bei  $\leq_{KD}$  einen Stärksten? Einen Unschlagbaren? Begründe Deine Antworten!

- ☐ **Aufgabe 2 (Schere-Stein-Papier\*** (nur für die Klassen 7/8) [4 Punkte]). Unter Drachenkindern ist der Stärkenvergleich Schere-Stein-Papier beliebt. Ist nach den klassischen Regeln von Schere-Stein-Papier der Stärkenvergleich von Schere, Stein und Papier ein PO-Stärkenvergleich im Sinne des Hohen Drachenrats? Begründe Deine Antwort!

- ☐ **Aufgabe 3 (Es kann nur einen geben!)\*** [4 Punkte]. Sei „ $\leq$ “ ein PO-Stärkenvergleich.

1. Beweise: Sind  $x$  und  $y$  ein Stärkster, so sind  $x$  und  $y$  bereits derselbe Drache.
2. Beweise: Ist  $x$  ein Stärkster, so ist  $x$  auch ein Unschlagbarer.

Hinweis. Es genügt nicht, ein Beispiel anzugeben, in dem dies erfüllt ist. Du musst ein allgemeingültiges logisches Argument mithilfe der Eigenschaften ①, ②, ③ geben!

- ☐ **Aufgabe 4 (geteilte Seriennummern\*\*** [4 Punkte]). Aus Langeweile überlegt sich einer der Schreibtischdrachen den folgenden Stärkenvergleich „ $\leq_T$ “ (unter der Annahme, dass alle Seriennummern positive natürliche Zahlen sind):

Für Drachen  $x$  und  $y$  gilt genau dann  $x \leq_T y$ , wenn die Seriennummer  $S(x)$  von  $x$  ein Teiler von  $S(y)$  ist.

1. Skizziere  $\leq_T$  für die Seriennummern 1, 3, 5, 7, 12, 30, 42, 45, 59, 60.
2. Beweise, dass  $\leq_T$  ein PO-Stärkenvergleich ist.

- ☐ **Aufgabe 5 (Oberst\*\*** (empfohlen ab Klasse 9) [4 Punkte]). Sei „ $\leq$ “ ein PO-Stärkenvergleich und sei  $M$  eine Menge von Drachen. Ein **Oberst** von  $M$  ist ein Drache  $x$  (nicht unbedingt aus  $M$ ) mit der Eigenschaft: Für alle Drachen  $y$  aus  $M$  gilt  $y \leq x$ .

1. Zeige: Ist  $x$  ein Oberst von  $M$  und ist  $x \leq y$ , so ist auch  $y$  ein Oberst von  $M$ .
2. Es gibt nun unendlich viele Drachen in Dracostan und als Seriennummern sind alle natürlichen Zahlen in Gebrauch. Zeige: Zu jeder endlichen Menge von Drachen gibt es einen Oberst bezüglich „ $\leq_T$ “ (Aufgabe 4).

- ☐ **Aufgabe 6 (rationale Seriennummern\*\*\*** (empfohlen ab Klasse 9) [4 Punkte]). In Dracostan gibt es nun noch mehr Drachen: Es gibt unendlich viele Drachen und als Seriennummern sind nun alle rationalen Zahlen in Gebrauch; es wird „ $\leq_S$ “ wie im dritten Beispiel verwendet. Zeige: Es gibt eine Menge  $M$  von Drachen mit folgenden beiden Eigenschaften:

- Die Menge  $M$  besitzt einen Oberst (Aufgabe 5).
- Zu jedem Oberst  $x$  von  $M$  existiert ein Oberst  $x'$  von  $M$  mit  $x' \leq_S x$  und  $x \neq x'$ .